Cours de mathématiques – Première ES/L

Chapitre 1 – Pourcentages....3
I – Proportions....3
II – Taux d'évolution....3
a) Détermination d'un taux d'évolution....3
b) Appliquer un taux d'évolution....4
III – Taux réciproque....4
IV – Indices....5
V – Évolutions successives....5
Chapitre 2 – Fonctions numériques....6
I – Rappels sur les fonctions....6
a) Notion de fonction....6
b) Variations....6
c) Représentation graphique....6
II – La fonction racine carrée....7
a) Sens de variation....7
b) Représentation graphique....7
III – La fonction cube....8
a) Sens de variation....8
b) Signe....8
c) Représentation graphique....8
Chapitre 3 – Polynômes du second degré....9
I – Définitions....9
II – Forme canonique d'un trinôme du second degré....9
III – Racines et factorisation d'un trinôme du second degré....10
IV – Signe et variations d'une fonction polynôme du second degré....11
a) Variations d'une fonction polynôme du second degré....11
b) Représentation graphique....11
c) Signe d'un trinôme....12
V – Tableau récapitulatif des trinômes du second degré....13
Chapitre 4 – Statistiques....14
I – Un symbole pour écrire une somme....14
II – Indicateurs statistiques....14
a) Indicateurs de tendance centrale....15
b) Indicateurs de position : Les quartiles....15
c) Boîtes-à-moustaches....16
d) Indicateurs de dispersion....16
e) Résumer une série statistique....17
Chapitre 5 – Dérivation....18
I – Nombre dérivé et tangente....18
a) Nombre dérivé d'une fonction en un réel....18
b) Tangente en un point à une courbe....19
II – Fonction dérivée....20
a) Dérivées des fonctions de référence....20

b) Somme de deux fonctions dérivables et produit d'une fonction dérivable par une constante 21
c) Produit de deux fonctions dérivables..21
d) Inverse d'une fonction dérivable...21
e) Quotient de deux fonctions dérivables...22
Chapitre 6 – Dérivation et variations..23
I – Dérivée et sens de variation...23
a) Dérivée d'une fonction monotone..23
b) Sens de variation d'une fonction dérivable sur un intervalle..................................23
II – Extrema locaux et dérivée..24
Chapitre 7 – Suites numériques..26
I – Généralités sur les suites...26
a) Suite définie par une relation explicite...26
b) Suite définie par une relation de récurrence...26
c) Représentation graphique d'une suite...27
d) Sens de variation d'une suite numérique...27
II – Suites arithmétiques...28
a) Définition...28
b) Terme général...28
c) Sens de variation...29
d) Représentation graphique...29
III – Suites géométriques...29
a) Définition...29
b) Terme général...30
c) Sens de variation...30
Chapitre 8 – Variables aléatoires..32
I – Quelques rappels de probabilités...32
a) Évènements..32
b) Probabilités...33
II – Loi d'une variable aléatoire...33
a) Variable aléatoire..33
b) Loi de probabilité d'une variable aléatoire...33
c) Espérance, variance, écart-type d'une variable aléatoire..34
d) Loi de probabilité et distribution des fréquences...34
Chapitre 9 – Loi de Bernoulli et loi binomiale...35
I – Modélisation d'une répétition d'expériences..35
a) Expériences indépendantes..35
b) Répétition d'une même expérience..35
II – Loi de Bernoulli...36
III – Loi binomiale...37
a) Schéma de Bernoulli...37
b) Coefficients binomiaux...37
c) Loi binomiale...38
IV – Loi binomiale et échantillonnage...39
a) Représentation graphique d'une loi binomiale..39
b) Échantillonnage et règle de décision...40

Chapitre 1 – Pourcentages

I – Proportions

<u>Illustration :</u> On sait que dans un lycée, il y a 368 filles et 450 garçons. On voudrait connaître le pourcentage d'élèves dans ce lycée qui sont des filles.

<u>Définition :</u> Une proportion (ou part) est le rapport du nombre d'éléments de la partie qui nous intéresse par le nombre total d'éléments.

<u>Exemple :</u> Dans ce lycée, il y a donc $368+450=818$ élèves. La proportion de filles parmi les élèves est donc $\frac{368}{818}\approx 0{,}45$. On peut donc dire que dans le lycée il y a environ 45 % de filles – et donc 55 % de garçons.

<u>Remarques :</u> Une proportion est toujours comprise en 0 (0 %) et 1 (100 %).

Calculer p % d'une quantité, c'est la multiplier par $\frac{p}{100}$.

II – Taux d'évolution

<u>a) Détermination d'un taux d'évolution</u>

<u>Illustration :</u> On sait qu'un article, qui coûtait 28 €, coûte maintenant 35 €. On cherche à savoir quel est son taux d'évolution, c'est-à-dire à quelle proportion (par rapport au prix de départ) correspond l'augmentation.

Dans ce cas, l'article a augmenté de $35-28=7$ €. On calcule la proportion : $\frac{7}{28}=0{,}25=25$ %.

Le prix a augmenté de 25 %.

<u>Définition :</u> Une quantité évolue d'une valeur initiale y_1 à une valeur finale y_2 .

Le taux d'évolution t de y_1 à y_2 est $t=\frac{y_2-y_1}{y_1}$.

Exemple : *Le nombre de naissances dans un pays est passé de 45 000 à 33 000. Le taux d'évolution est donc* $t=\frac{33000-45000}{45000}\approx-0{,}27$ *, soit une baisse de 27 % environ.*

Remarques :

- Si $t>0$, il s'agit d'une augmentation, si $t<0$, il s'agit d'une diminution.
- Un taux d'évolution peut dépasser 100 %.

b) Appliquer un taux d'évolution

Illustration : La température d'une pièce est de 28 °C. Elle augmente de 25 %, c'est-à-dire de $28\times\frac{25}{100}=7$ °C.

Elle est donc maintenant de $28+7=33$ °C.

On a finalement calculé $28+28\times\frac{25}{100}=28\times1+28\times\frac{25}{100}=28\times1+28\times\frac{25}{100}=28\times\left(1+\frac{25}{100}\right)$.

Propriété : Faire subir une évolution de taux t , c'est multiplier une quantité par le coefficient multiplicateur $1+t$.

Exemple : Faire subir une évolution de taux $t=-20\,\%$ *, c'est donc multiplier par* $1-\frac{20}{100}=0{,}8$.

III – Taux réciproque

Illustration : Pour les soldes, un prix a baissé de 30 %. On cherche quelle évolution lui faire subir pour revenir au prix initial.
Si $t\neq-1$ est l'évolution subie, le coefficient multiplicateur est $1+t$, on cherche donc l'évolution réciproque t' telle que les évolutions successives de taux t et t' équivalent à une évolution de taux 0, c'est-à-dire $(1+t)(1+t')=1\Leftrightarrow1+t'=\frac{1}{1+t}$.

Propriété : Si une quantité subit une évolution de taux $t\neq-1$, l'évolution réciproque de taux t' vérifie $t'=\frac{1}{1+t}-1$.

Exemple : Si une quantité subit une augmentation de 25 %, le taux t' *de l'évolution réciproque est* $t'=\frac{1}{1+0{,}25}-1=\frac{1}{1{,}25}-1=-0{,}2=-20\,\%$.
Une diminution de 20 % compense une augmentation de 25 %.

IV – Indices

Illustration : En France, une nouvelle méthode de recensement a été mise en place en 2004.

Si on veut rapidement savoir dans quelle proportion évolue la population, on peut choisir 2004 comme année de référence, et lui attribuer « l'indice 100 » – c'est-à-dire faire comme si il y avait 100 habitants seulement en France en 2004. Par proportionnalité, l'indice en 2005 était de 100,8. On peut donc en conclure que la population française a augmenté de 0,8 %.

Définition : y_1 et y_2 sont deux valeurs d'une même grandeur.

Définir l'indice base 100 de cette grandeur correspondant à y_1, c'est associer à y_1 la valeur $I_1=100$. Par proportionnalité, on calcule l'indice I_2 associe à y_2.

Propriété : On a donc $\frac{I_2}{I_1}=\frac{y_2}{y_1}$ donc $I_2=100\times\frac{y_2}{y_1}$.

Exemple : Le taux de natalité en France pour 1 000 habitants était de 18,70 en 1960 et de 12,83 en 2010. On choisit comme indice de base 100 le taux de natalité pour 1 000 habitants en 1960.
L'indice en 2010 est donc $100\times\frac{12{,}83}{18{,}70}\approx 68{,}6$.

V – Évolutions successives

Illustration : Une quantité peut subir plusieurs évolutions successives – par exemple une diminution de 50 %, puis une augmentation de 30 %, puis une diminution de 10 %. À chaque étape, la nouvelle quantité est égale à la quantité précédente multipliée par un coefficient multiplicatif de la forme $1+t$ où t est le taux d'évolution. On cherche le taux d'évolution global.

Si une quantité subit n évolutions de taux respectifs t_1, t_2, …, t_n, la quantité a été multipliée par $(1+t_1)(1+t_2)\dots(1+t_n)$. Si T est le taux qui correspond à l'évolution globale, on a alors $1+T=(1+t_1)(1+t_2)\dots(1+t_n)$.

Propriété : Si une quantité subit n évolutions de taux respectifs t_1, t_2, …, t_n, alors le taux global T vérifie $T=(1+t_1)(1+t_2)\dots(1+t_n)-1$.

Exemple : Une quantité subit une augmentation de 10 %, une diminution de 20 %, une augmentation de 50 %.
Le taux global T est donc $T=\left(1+\frac{10}{100}\right)\left(1-\frac{20}{100}\right)\left(1+\frac{50}{100}\right)-1=1{,}1\times0{,}8\times1{,}5-1=0{,}32=32\,\%$.
L'évolution globale est une augmentation de 32 %.
Une augmentation de 10 %, suivie d'une diminution de 20 %, suivie d'une augmentation de 50 % équivalent à une seule augmentation de 32 %.

Chapitre 2 – Fonctions numériques

I – Rappels sur les fonctions

a) Notion de fonction

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.
Une fonction f définie sur une partie D de $\mathbb{R}$ transforme tout réel $x \in D$ en un unique réel noté $f(x)$, que l'on appelle *image* de x par f.

Exemples :

- *La fonction carré est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$.*
- *La fonction inverse est la fonction g définie sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ par $g(x)=\frac{1}{x}$.*

b) Variations

Rappels : Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- **On dit que f est *croissante* sur I si pour tous $a<b$ de I, $f(a)\leq f(b)$.**
- **On dit que f est *strictement croissante* sur I si pour tous $a<b$ de I, $f(a)<f(b)$.**
- **On dit que f est *décroissante* sur I si pour tous $a<b$ de I, $f(a)\geq f(b)$.**
- **On dit que f est *strictement décroissante* sur I si pour tous $a<b$ de I, $f(a)>f(b)$.**

Une fonction f est monotone sur I si elle est croissante (ou décroissante) sur I ; elle est strictement monotone sur I si elle est strictement croissante (ou strictement décroissante) sur I.

c) Représentation graphique

Définition : On appelle représentation graphique de la fonction f (définie sur D) l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $x\in D$ et $y=f(x)$.

Exemple : On considère la fonction f définie sur $[-2;6]$ par $f(x)=x^2-3x+1$.

- *Le point $A(4;5)$ appartient à la courbe de f, car $4\in[-2;6]$ et $f(4)=4^2-3\times4+1=5$.*
- *Le point $B(7;29)$ n'appartient pas à la courbe de f, car $7\notin[-2;6]$.*

II – La fonction racine carrée

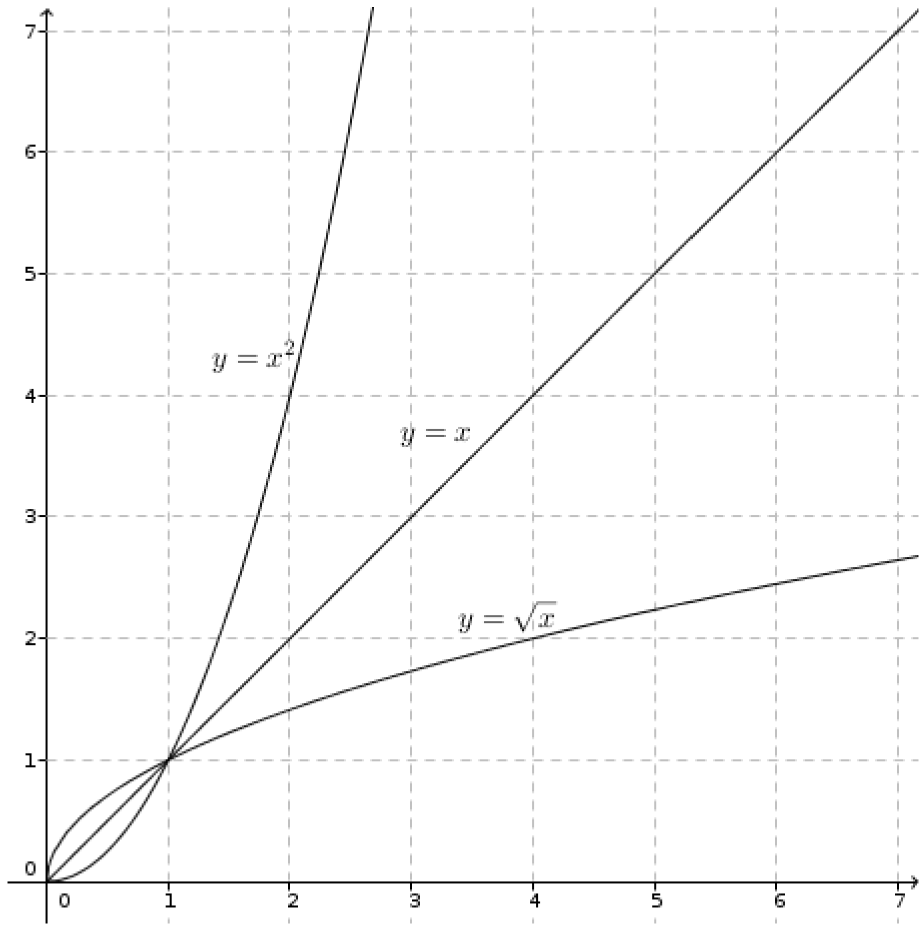
La fonction racine carrée est la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}$.
Elle est définie sur $[0;+\infty[$ car seuls les réels positifs ont une racine carrée.
Une racine carrée est toujours positive.

a) Sens de variation

La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

x	0 $\quad\quad$ $+\infty$
$\sqrt{x}$	0 $\nearrow$

b) Représentation graphique



Les fonctions carré et racine carrée étant réciproques l'une de l'autre sur $[0;+\infty[$, leurs courbes dans un repère orthonormal sont symétriques par rapport à la droite $y=x$.

III – La fonction cube

La fonction cube est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3$.

a) Sens de variation

La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^3		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

b) Signe

À l'aide du tableau de variation, on en déduit que :

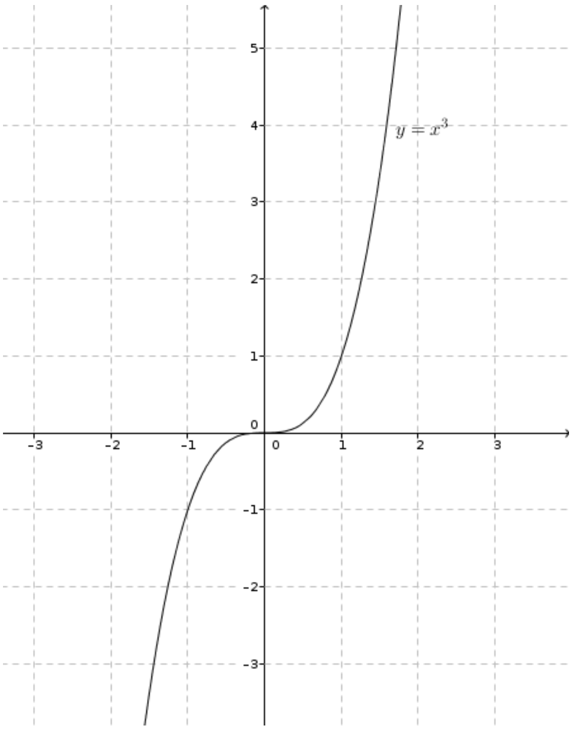
- $x^3<0 \Leftrightarrow x<0$
- $x^3>0 \Leftrightarrow x>0$
- $x^3=0 \Leftrightarrow x=0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^3		$-$	0	$+$	

c) Représentation graphique

La courbe de la fonction cube dans un repère orthonormal est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Cela provient du fait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(-x)^3=-x^3$ (deux nombres opposés ont des images opposées).



Chapitre 3 – Polynômes du second degré

I – Définitions

<u>Définition :</u> On appelle *fonction polynôme* du second degré (ou *trinôme* du second degré) toute fonction P définie sur $\mathbb{R}$ pour laquelle il existe des réels $a \neq 0$, b, c tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait : $P(x) = a x^2 + b x + c$.
L'expression $a x^2 + b x + c$ est appelée <u>un polynôme du second degré</u>.

<u>*Exemples :*</u>
- *La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2 + x + \sqrt{2}$ est une fonction polynôme du second degré. On a ici $a = -3$, $b = 1$, $c = \sqrt{2}$.*
- *La fonction carré f est une fonction polynôme du second degré, puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) = x^2 = 1x^2 + 0x + 0$. On a ici $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$.*

<u>Définition :</u> Soit P un trinôme du second degré de forme réduite $P(x) = a x^2 + b x + c$ (avec $a \neq 0$). On appelle <u>discriminant</u> du trinôme le réel noté Δ défini par $\Delta = b^2 - 4ac$.

<u>*Exemple :*</u> *Pour $P(x) = 5x^2 - 2x + 3$, on a $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 5 \times 3 = -56$ puisque $a = 5$, $b = -2$ et $c = 3$.*

II – Forme canonique d'un trinôme du second degré

<u>Théorème :</u> Un trinôme P du second degré $P(x) = a x^2 + b x + c$ (avec $a \neq 0$) s'écrit de façon unique sous la forme $P(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$, appelée *forme canonique* du trinôme P.
On a $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = -\dfrac{\Delta}{4a}$; de plus, $P(\alpha) = \beta$.

<u>Preuve de l'existence :</u> On développe :

$$a(x-\alpha)^2 + \beta = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a\left(x^2 + 2x\frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \text{ donc}$$

$$a(x-\alpha)^2 + \beta = a x^2 + \frac{2axb}{2a} + \frac{ab^2}{4a^2} - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a x^2 + b x + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a x^2 + b x + \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a}$$

$$a(x-\alpha)^2 + \beta = a x^2 + b x + c .$$

On a $P(\alpha) = a(\alpha - \alpha)^2 + \beta = a \times 0 + \beta = \beta$.

<u>*Exemple :*</u> *Pour $P(x) = x^2 - 3x + 7$, on a $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 7 = -19$. On a $\alpha = -\dfrac{-3}{2 \times 1} = \dfrac{3}{2}$ et $\beta = -\dfrac{-19}{4 \times 1} = \dfrac{19}{4}$. La forme canonique est donc $P(x) = 1\left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{19}{4} = \left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{19}{4}$.*

III – Racines et factorisation d'un trinôme du second degré

<u>Définition :</u> Soient P un polynôme du second degré et x_0 un réel.
On dit que x_0 est une *racine réelle* de P lorsque $P(x_0)=0$.

<u>Théorème :</u> Soit $P(x)=ax^2+bx+c$, avec $a\neq 0$ un trinôme du second degré et Δ son discriminant.

- **Si $\Delta>0$, alors P admet deux racines réelles *distinctes* :**
  $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$.
- **Si $\Delta=0$, alors P admet une seule racine réelle, appelée racine *double* :**
  $x_0=-\dfrac{b}{2a}$ et, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $P(x)=a(x-x_0)^2$.
- **Si $\Delta<0$, alors P n'admet aucune racine réelle, et on ne peut pas factoriser $P(x)$.**

<u>Exemples :</u>

- $P(x)=5x^2-10x-5$
- $Q(x)=x^2-4x\sqrt{3}+12$
- $R(x)=3x^2-4x+2$

<u>Preuve :</u> La forme canonique étant $P(x)=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a}$, on factorise les deux termes par $a\neq 0$: $P(x)=a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$.

- Si $\Delta>0$, on a $P(x)=a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\left(\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right]$, et on peut factoriser à l'aide d'une identité remarquable :
  $P(x)=a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}+\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\dfrac{b}{2a}-\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right]=a\left(x-\left(\dfrac{-b}{2a}-\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right)\left(x-\left(\dfrac{-b}{2a}+\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right)$ donc
  $P(x)=a\left(x-\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x-\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$. On a obtenu la factorisation cherchée, et en résolvant l'équation produit $P(x)=0$ avec $a\neq 0$, on obtient comme racines distinctes $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta=0$, on a donc $P(x)=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=a\left(x-\dfrac{-b}{2a}\right)^2$. On a bien la factorisation souhaitée, et en résolvant l'équation produit $P(x)=0$ avec $a\neq 0$, on obtient comme racine $-\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta<0$, $-\dfrac{\Delta}{4a^2}>0$ donc $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}>0$. Donc, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $P(x)\neq 0$. P n'a donc pas de racine réelle.
  Supposons que l'on puisse factoriser P. P étant de degré 2, on pourrait le factoriser par $(x-x_0)$, x_0 étant un réel. $P(x_0)=0$ puisque $x_0-x_0=0$, donc x_0 serait une racine, or P n'en a pas. Donc on ne peut pas factoriser P.

Remarque : Le cas $\Delta=0$ correspond au cas où, après avoir factorisé P par $a\neq 0$, on peut utiliser directement une identité remarquable. Le cas $\Delta=0$ peut être vu comme un cas particulier de $\Delta>0$: on a alors $x_1=x_0$ et $x_2=x_0$, ce qui justifie l'utilisation de l'expression « racine double ».

IV – Signe et variations d'une fonction polynôme du second degré

a) Variations d'une fonction polynôme du second degré

Soit P une fonction polynôme du second degré de forme réduite $P(x)=a x^2+bx+c$ avec $a\neq 0$.
Sa forme canonique est $P(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$, avec $\alpha=-\dfrac{b}{2a}$ et $\beta=-\dfrac{\Delta}{4a}$.

Théorème : On a vu en classe de seconde que P a comme tableau de variation sur $\mathbb{R}$:

Si $a<0$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
P		$\nearrow$	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	$\searrow$	

Si $a>0$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
P		$\searrow$	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	$\nearrow$	

b) Représentation graphique

En admettant que la fonction P est représentée par une parabole, on a ce résultat immédiat :

Théorème : La courbe représentative de la fonction $P(x)=a x^2+b x+c$ (avec $a\neq 0$) est une parabole dont le sommet S a pour coordonnées $\left(-\dfrac{b}{2a};-\dfrac{\Delta}{4a}\right)$.

Exemple : Soit $P(x)=x^2-x-12$.
$\Delta=(-1)^2-4\times 1\times(-12)=1+48=49$.
Le sommet de la parabole a pour coordonnées $S\left(-\dfrac{-1}{2\times 1};-\dfrac{49}{4\times 1}\right)$, soit $S\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{49}{4}\right)$.

c) Signe d'un trinôme

En dressant le tableau de signe de $P(x)$ lorsque $\Delta \geqslant 0$, ou en remarquant comme nous l'avons fait que si $\Delta < 0$ $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}>0$, on peut en déduire les tableaux de signe de $P(x)$:

Propriété : **Soit $P(x)=ax^2+bx+c$ avec $a\neq 0$.**

- **Si $\Delta>0$, on a ce tableau de signe (on appelle x_1 la plus petite racine)**

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$P(x)$		**Signe de a**	**0**	**Signe de $-a$**	**0**	**Signe de a**	

- **Si $\Delta=0$, on a ce tableau de signe :**

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$P(x)$		**Signe de a**	**0**	**Signe de a**	

- **Si $\Delta<0$, on a ce tableau de signe :**

x	$-\infty$		$+\infty$
$P(x)$		**Signe de a**	

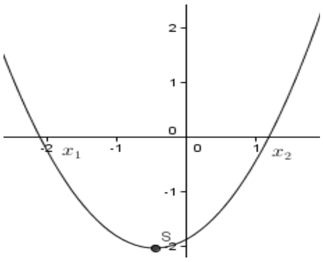
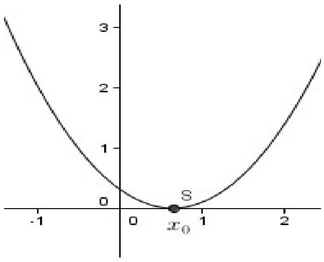
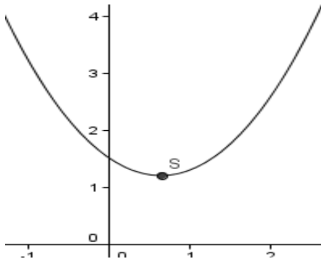
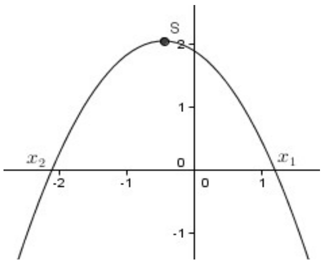
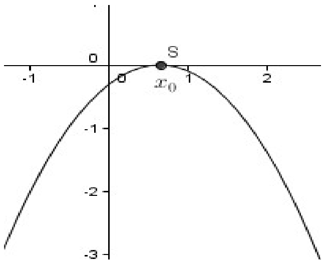
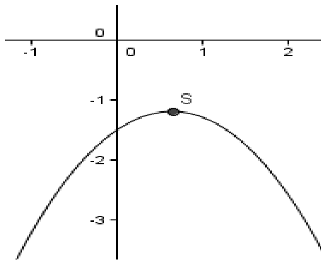
En résumé, le trinôme est du signe de a sauf entre les racines lorsque $\Delta>0$.

V – Tableau récapitulatif des trinômes du second degré

$$P(x)=a x^2+b x+c \text{ (avec } a\neq 0\text{)}$$

Discriminant $\Delta=b^2-4ac$

Coordonnées du sommet $S\left(-\dfrac{b}{2a};-\dfrac{\Delta}{4a}\right)$

<table>
<tr><th></th><th>$\Delta>0$</th><th>$\Delta=0$</th><th>$\Delta<0$</th></tr>
<tr><td>Solutions de l'équation $a x^2+b x+c=0$</td><td>$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$</td><td>$x_0=-\dfrac{b}{2a}$
(racine double)</td><td>Pas de solution</td></tr>
<tr><td>Factorisation de $a x^2+b x+c$</td><td>$a(x-x_1)(x-x_2)$</td><td>$a(x-x_0)^2$</td><td>Pas de factorisation</td></tr>
<tr><td>Représentation graphique quand $a>0$</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Représentation graphique quand $a<0$</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Signe de $a x^2+b x+c$</td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>x_1</td><td></td><td>x_2</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td></td><td>signe de a</td><td>0</td><td>signe de $-a$</td><td>0</td><td>signe de a</td><td></td></tr></table>
(en notant x_1 la plus petite racine)</td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>x_0</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td></td><td>signe de a</td><td>0</td><td>signe de a</td><td></td></tr></table></td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td></td><td>signe de a</td><td></td></tr></table></td></tr>
</table>

Chapitre 4 – Statistiques

I – Un symbole pour écrire une somme

En statistiques, on calcule souvent des sommes.

Pour ceci, on utilise un symbole afin d'écrire une somme en évitant les pointillés : par exemple, comment noter simplement $1+2+3+4+\ldots+20$?

Cette somme comporte 20 termes, on peut noter cette somme ainsi, avec un symbole *sigma* (Σ) :

$\sum_{i=1}^{20} i=1+2+3+\ldots+20$. Cela se lit « somme pour *i* allant de 1 à 20 des *i* ».

De la même manière, on a : $1^2+2^2+3^2+\ldots+100^2=\sum_{i=1}^{100} i^2$.

Cette écriture est bien appropriée pour des indices : $a_3+a_4+a_5+\ldots+a_{71}=\sum_{i=3}^{71} a_i$.

II – Indicateurs statistiques

On s'intéresse à un caractère prenant différentes valeurs. On suppose que le caractère prend p valeurs différentes. Les différentes valeurs du caractère sont x_1 , x_2 , ..., x_p d'effectifs respectifs n_1 , n_2 , …, n_p . n_i est donc l'effectif de la valeur x_i .

On peut donc résumer la série par un tableau statistique :

Valeur du caractère	x_1	x_2	...	x_p
Effectif	n_1	n_2	...	n_p

Effectif total : $N=n_1+n_2+...+n_p=\sum_{i=1}^{p} n_i$

Fréquence de la valeur x_i : $f_i=\frac{n_i}{N}$

<u>*Exemple :*</u> *Pour toute cette partie, on considère les âges d'un groupe de personnes.*

Âge (ans)	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
Effectif	*1*	*2*	*1*	*3*	*5*	*6*	*7*	*4*	*1*	*2*	*2*
Effectif Cumulé Croissant	*1*	*3*	*4*	*7*	*12*	*18*	*25*	*29*	*30*	*32*	*34*

*L'**effectif total** est* $N=1+2+1+3+5+6+7+4+1+2+2=34$ *(c'est le dernier effectif cumulé croissant).*

a) Indicateurs de tendance centrale

Mode : C'est la valeur la plus fréquente.

Moyenne : $\bar{x}=\frac{n_1x_1+n_2x_2+...+n_px_p}{N}=\frac{\sum_{i=1}^{p}n_ix_i}{N}$

Théorème : On a aussi $\bar{x}=f_1x_1+f_2x_2+...+f_px_p=\sum_{i=1}^{p}f_ix_i$

Preuve : $\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{p}n_ix_i}{N}=\sum_{i=1}^{p}\frac{n_i}{N}x_i$ or $f_i=\frac{n_i}{N}$ donc $\bar{x}=\sum_{i=1}^{p}f_ix_i$

Médiane : On suppose que les valeurs de la série d'effectif N sont rangées par ordre croissant (chacune d'elles étant répétée autant de fois que son effectif) : $x_1\leq x_2\leq...\leq x_N$.

- Si N est impair, $Me=x_{\frac{N+1}{2}}$ (c'est le terme de rang $\frac{N+1}{2}$).
- Si N est pair, $Me=\frac{x_{\frac{N}{2}}+x_{\frac{N}{2}+1}}{2}$ (c'est la moyenne des termes de rang $\frac{N}{2}$ et $\frac{N}{2}+1$).

Exemple : Avec l'exemple précédent,

- *Le **mode** est 6 ans (car 7 personnes ont 6 ans).*
- *La **moyenne** est*
  $\bar{x}=\frac{0\times1+1\times2+2\times1+3\times3+4\times5+5\times6+6\times7+7\times4+8\times1+9\times2+10\times2}{34}\approx5{,}26$ *ans.*
- *La **médiane** est la valeur qui sépare la série statistique en deux parties de même effectif. Ici, il y a 34 valeurs, donc la médiane est la moyenne de la 17ème et la 18ème valeur. Grâce aux effectifs cumulés croissant, la 17ème valeur est 5 ans, la 18ème valeur est 5 ans. La médiane est* $Me=\frac{5+5}{2}=5$ *ans.*

b) Indicateurs de position : Les quartiles

Les valeurs de la série d'effectif N sont rangées par ordre croissant (chacune d'elles étant répétée autant de fois que son effectif) : $x_1\leq x_2\leq...\leq x_N$.

Premier quartile : Le premier quartile Q_1 de la série est la valeur x_i dont l'indice i est le plus petit entier supérieur ou égal à $\frac{N}{4}$.
Troisième quartile : Le troisième quartile Q_3 de la série est la valeur x_i dont l'indice i est le plus petit entier supérieur ou égal à $\frac{3N}{4}$.

Remarque : On prend souvent comme deuxième quartile la médiane.

Exemple : Avec l'exemple précédent,

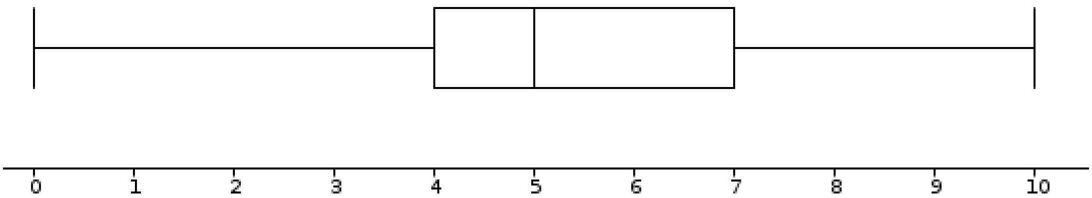
- $\frac{N}{4}=\frac{34}{4}=8,5$ *, donc* Q_1 *est la 9ème valeur :* $Q_1=4$ *ans.*
- $\frac{3N}{4}=\frac{3\times 34}{4}=25,5$ *, donc* Q_3 *est la 26ème valeur :* $Q_3=7$ *ans.*

c) Boîtes-à-moustaches

Pour résumer notre série statistique, on construit un diagramme en boîte.

- Les valeurs du caractère sont résumées sur un axe.
- On construit un rectangle (la boîte), parallèlement à l'axe, dont la longueur est l'intervalle interquartile $[Q_1 ; Q_3]$.
- Un trait symbolise la médiane Me .
- On place les moustaches au niveau des valeurs extrêmes.

Exemple : Avec l'exemple précédent, on a cette boîte-à-moustaches pour les âges du groupe de personnes :



d) Indicateurs de dispersion

Variance : $V=\frac{n_1(x_1-\overline{x})^2+n_2(x_2-\overline{x})^2+...+n_p(x_p-\overline{x})^2}{N}=\frac{\sum_{i=1}^{p} n_i(x_i-\overline{x})^2}{N}$

Théorème admis : On a aussi $V=\frac{n_1 x_1^2+n_2 x_2^2+...+n_p x_p^2}{N}-\overline{x}^2=\frac{\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2}{N}-\overline{x}^2$

Écart-type : $\sigma=\sqrt{V}$

Écart interquartile : $E_i=Q_3-Q_1$

Étendue : C'est la différence entre les valeurs extrêmes de la série : la plus grande moins la plus petite.

<u>Exemple :</u> Avec l'exemple précédent, comme $\bar{x} \approx 5{,}26$ on a :

- $V = \dfrac{1(0-\bar{x})^2 + 2(1-\bar{x})^2 + 1(2-\bar{x})^2 + 3(3-\bar{x})^2 + \ldots + 1(8-\bar{x})^2 + 2(9-\bar{x})^2 + 2(10-\bar{x})^2}{34} \approx 5{,}72$.

  On a également $V = \dfrac{1\times 0^2 + 2\times 1^2 + 1\times 2^2 + 3\times 3^2 + \ldots 1\times 8^5 + 2\times 9^2 + 2\times 10^2}{34} - \bar{x}^2 \approx 5{,}72$.
- $\sigma = \sqrt{V} \approx 2{,}39$ *ans.*
- $E_i = Q_3 - Q_1 = 7 - 4 = 3$ *ans.*
- *Étendue :* $10 - 0 = 10$ *ans.*

e) Résumer une série statistique

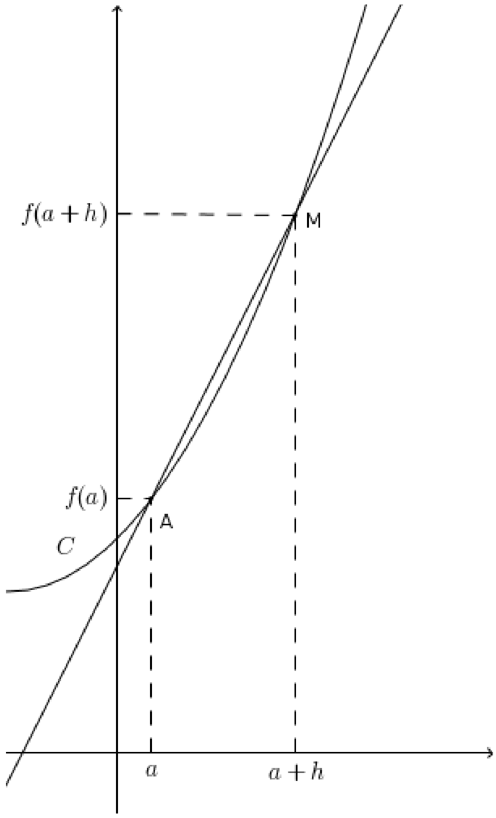
Résumer une série statistique, c'est indiquer la répartition des données en utilisant différents indicateurs, notamment un indicateur de tendance centrale et un indicateur de dispersion.

Paramètre de tendance centrale	**Paramètre de dispersion**	**Propriété**
Médiane : Me	Écart interquartile : E_i	Peu sensible aux valeurs extrêmes
Moyenne : $\bar{x}$	Écart-type : σ	Sensible aux valeurs extrêmes

Chapitre 5 – Dérivation

I – Nombre dérivé et tangente

Dans toute cette partie, f est une fonction définie sur un intervalle I, et a un réel appartenant à I. C est la courbe représentative de f.



<u>a) Nombre dérivé d'une fonction en un réel</u>

Soit $h \neq 0$ un réel. On considère A le point de C d'abscisse a, et M le point de C d'abscisse $a+h$. A a donc pour coordonnées $(a;f(a))$, et M a pour coordonnées $(a+h;f(a+h))$.

Le coefficient directeur de la droite (AM) est donc $\frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Ce rapport est le *taux d'accroissement* de f entre a et $a+h$.

Ce rapport n'existe pas quand $h=0$, puisque l'on ferait une division par 0.

En revanche, on peut s'intéresser à ce qu'il devient quand h se rapproche de 0. On dit aussi « quand h tend vers 0 ».

<u>Définition :</u> Soient f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel appartenant à I. On dit que la fonction f est dérivable en a s'il existe un réel, que l'on note $f'(a)$, tel que $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$. Ce réel $f'(a)$, *s'il existe,* est le *nombre dérivé de la fonction f en a*.

<u>Exemple :</u> Soit f la fonction carré (définie sur $\mathbb{R}$). Cherchons si f est dérivable en -3 :

Soit $h \neq 0$, le taux d'accroissement de f entre -3 et $-3+h$ est :
$\frac{f(-3+h)-f(-3)}{h} = \frac{(-3+h)^2-(-3)^2}{h} = \frac{9-6h+h^2-9}{h} = \frac{h(6+h)}{h} = 6+h$.
Comme $\lim\limits_{h \to 0} 6+h = 6$, f est dérivable en -3 et $f'(-3)=6$.

b) Tangente en un point à une courbe

Graphiquement, quand h tend vers 0, le point M se rapproche de A.

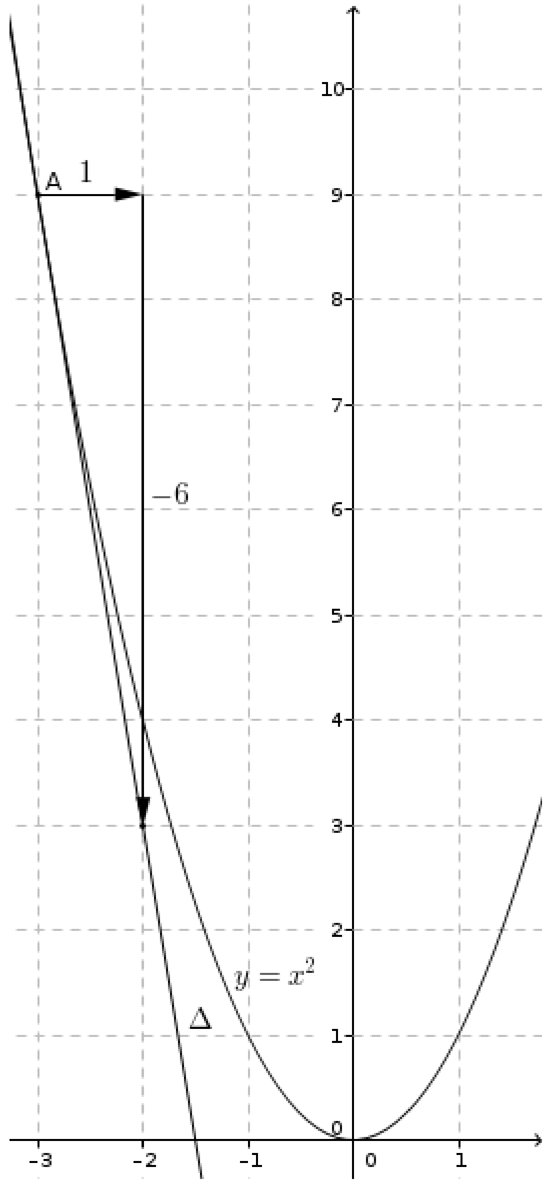
Dire que le taux d'accroissement de f entre a et $a+h$ tend vers $f'(a)$ revient donc à dire que le coefficient directeur de (AM) tend vers $f'(a)$ quand M se rapproche de A.

Définition : Si f est dérivable en a, on appelle *tangente* en A à la courbe C la droite Δ qui passe par A et qui a pour coefficient directeur $f'(a)$.

Exemple : On a déterminé précédemment que la fonction carré f était dérivable en -3 et que $f'(-3)=-6$. Comme $f(-3)=(-3)^2=9$, la tangente à la courbe de f au point d'abscisse -3 est donc la droite passant par $A(-3;9)$ et ayant pour coefficient directeur -6.

Graphiquement, on constate que la tangente frôle la courbe en A.

On peut donc déterminer l'équation de Δ :
Son équation est $y=-6x+b$ or $A(-3;9)\in\Delta$ donc $9=-6\times 3+b \Leftrightarrow 9=18+b \Leftrightarrow -9=b$.
Δ a pour équation $\boldsymbol{y=-6x-9}$.



Théorème : Si f est dérivable en a, Δ a pour équation $y=f'(a)(x-a)+f(a)$.

Preuve : L'équation de Δ est de la forme $y=f'(a)x+b$, puisque $f'(a)$ est son coefficient directeur. Comme $A(a, f(a))\in\Delta$, alors ses coordonnées vérifient l'équation :
$f(a)=f'(a)a+b$ donc $b=-f'(a)a+f(a)$, donc $y=f'(a)x-f'(a)a+f(a)$, soit $\boldsymbol{y=f'(a)(x-a)+f(a)}$.

II – Fonction dérivée

<u>Définition :</u> Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Si f est dérivable pour tout $x \in I$, on dit que f est dérivable sur I. La fonction qui à tout $x \in I$ associe le nombre dérivé $f'(x)$ est la fonction dérivée de f et se note f'.

<u>Exemples :</u>

- *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $h \neq 0$,*
  $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}=\dfrac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}=\dfrac{2xh+h^2}{h}=\dfrac{h(2x+h)}{h}=2x+h$.
  *Comme $\lim\limits_{h \to 0} 2x+h=2x$, **la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f'(x)=2x$.***

- *Soit g la fonction définie sur $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{1}{x}$. Pour $x \neq 0$ et $h \neq 0$, $h \neq -x$,*
  $\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}=\dfrac{\dfrac{1}{x+h}-\dfrac{1}{x}}{h}=\dfrac{\dfrac{x}{x(x+h)}-\dfrac{x+h}{x(x+h)}}{h}=\dfrac{-\dfrac{h}{x(x+h)}}{h}=-\dfrac{h}{xh(x+h)}=-\dfrac{1}{x(x+h)}$.
  $\lim\limits_{h \to 0} -\dfrac{1}{x(x+h)}=-\dfrac{1}{x^2}$ *donc g **est dérivable sur $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$ par $g'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$.***

<u>a) Dérivées des fonctions de référence</u>

D_f domaine de définition	$f(x)=$	$D_{f'}$ domaine de dérivabilité	$f'(x)=$
$\mathbb{R}$	k (constante)	$\mathbb{R}$	0
$\mathbb{R}$	x	$\mathbb{R}$	1
$\mathbb{R}$	x^2	$\mathbb{R}$	$2x$
$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$	$\dfrac{1}{x}$	$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$	$-\dfrac{1}{x^2}$
$\mathbb{R}$	x^n (avec $n \in \mathbb{N}^*$)	$\mathbb{R}$	$n x^{n-1}$
$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$	$\dfrac{1}{x^n}$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$)	$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$
$[0;+\infty[$	$\sqrt{x}$	$]0;+\infty[$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

<u>Exemple :</u> La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^8$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f'(x)=8x^7$.

b) Somme de deux fonctions dérivables et produit d'une fonction dérivable par une constante

Théorème : Soient u et v deux fonctions dérivables sur un même *intervalle* I, et λ un réel. Alors :
- **La fonction $u+v$ est dérivable sur I et $(u+v)'(x)=u'(x)+v'(x)$.**
- **La fonction λu est dérivable sur I et $(\lambda u)'(x)=\lambda u'(x)$.**

Exemples :
- *f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2+x^3$.*
  f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et
  $f'(x)=2x+3x^{3-1}=2x+3x^2$.
- *f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=3x^3-\frac{1}{x}$.*
  f est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme somme de deux fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$ et
  $f'(x)=3\times 3x^2-\left(-\frac{1}{x^2}\right)=9x^2+\frac{1}{x^2}$.

c) Produit de deux fonctions dérivables

Théorème : Soient u et v deux fonctions dérivables sur un même *intervalle* I. Alors la fonction produit uv est dérivable sur I et $(uv)'(x)=u'(x)v(x)+v'(x)u(x)$.

Exemple : *f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^3\times(4x-5)$.*
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$:
$f(x)=u(x)v(x)$ *avec* $u(x)=2x^3$ *et* $v(x)=4x-5$. $u'(x)=2\times 3x^2=6x^2$ *et* $v'(x)=4$.
$f'(x)=u'(x)v(x)+v'(x)u(x)=6x^2(4x-5)+4\times 2x^3=6x^2(4x-5)+8x^3$.

d) Inverse d'une fonction dérivable

Théorème : Soit v une fonction dérivable sur un *intervalle* I, telle que v ne s'annule pas sur I. Alors la fonction $\frac{1}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{v}\right)'(x)=-\frac{v'(x)}{[v(x)]^2}$.

Exemple : *f est définie sur $[10;+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{4x-3}$.*
f est dérivable sur $[10;+\infty[$ comme inverse d'une fonction dérivable sur $[10;+\infty[$.

$f(x)=\frac{1}{v(x)}$ *avec* $v(x)=4x-3$. $v'(x)=4$.
$f'(x)=-\frac{v'(x)}{[v(x)]^2}=-\frac{4}{(4x-3)^2}$.

e) Quotient de deux fonctions dérivables

Théorème : Soient u et v deux fonctions dérivables sur un même *intervalle* I, telle que v ne s'annule pas sur I. Alors la fonction quotient $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x)=\frac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{[v(x)]^2}.$$

Exemple : f *est définie sur* $[10;+\infty[$ *par* $f(x)=\frac{x^2}{4x-3}$.

f *est dérivable sur* $[10;+\infty[$ *comme quotient de deux fonctions dérivables sur* $[10;+\infty[$.

$f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$ *avec* $u(x)=x^2$ *et* $v(x)=4x-3$. $u'(x)=2x$ *et* $v'(x)=4$.

$$f'(x)=\frac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{[v(x)]^2}=\frac{2x(4x-3)-4\times x^2}{(4x-3)^2}=\frac{8x^2-6x-4x^2}{(4x-3)^2}=\frac{4x^2-6x}{(4x-3)^2}.$$

Chapitre 6 – Dérivation et variations

I – Dérivée et sens de variation

a) Dérivée d'une fonction monotone

Théorème : Soit f une fonction monotone et dérivable sur un intervalle I.
- **Si f est une fonction croissante sur I, alors, pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$.**
- **Si f est une fonction décroissante sur I, alors, pour tout $x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$.**
- **Si f est constante sur I, alors, pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$.**

Exemple : La fonction carrée f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 2x$.
- *Elle est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et sur $]-\infty; 0]$, $f'(x) = 2x \leqslant 0$.*
- *Elle est croissante sur $[0; +\infty[$ et sur $[0; +\infty[$, $f'(x) = 2x \geqslant 0$.*

Preuve :
- Soit f est une fonction dérivable et croissante sur un intervalle I. Soit a un réel quelconque de l'intervalle I. Pour tout réel non nul h tel que $a+h \in I$, on a :
  - Si $h > 0$ alors $a+h > a$ et donc $f(a+h) \geqslant f(a)$ puisque f est croissante sur I. Donc, $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \geqslant 0$ (quotient de deux nombres positifs).
  - Si $h < 0$ alors $a+h < a$ et donc $f(a+h) \leqslant f(a)$ puisque f est croissante sur I. Donc, $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \geqslant 0$ (quotient de deux nombres négatifs).

  Dans tous les cas, $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \geqslant 0$. Or, $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$ donc $f'(a) \geqslant 0$ (on admettra que la limite en 0 d'une expression positive est positive).
- Le cas où f est décroissante sur I est analogue.
- Si f est constante sur I, son taux d'accroissement est nul et donc, en passant à la limite, $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$.

b) Sens de variation d'une fonction dérivable sur un intervalle

Théorème (admis) : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I contenu dans son ensemble de définition D_f.
- **Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$ (éventuellement, f' peut s'annuler en un nombre fini de valeurs) alors f est strictement croissante sur I.**
- **Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I$ (éventuellement, f' peut s'annuler en un nombre fini de valeurs) alors f est strictement décroissante sur I.**
- **Si pour tout $x \in I$ $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.**

Remarque : Comme le dit le théorème, même si f est strictement monotone sur I, la fonction f' peut s'annuler sur I : par exemple, la fonction cube f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, est dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 3x^2$, et $f'(0) = 3 \times 0^2 = 0$.

Exemple : *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2+2x-1$. Étudions ses variations.*
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f'(x)=2x+2$.
On dresse le tableau de variations en utilisant le signe de la dérivée. Le signe de la dérivée est facile à obtenir ici : c'est une fonction affine, qui s'annule en $x=-1$ et qui est strictement croissante puisque son coefficient directeur est supérieur strictement à 0.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		↘	-2	↗	

On a en effet $f(-1)=(-1)^2+2\times(-1)-1=-2$.

II – Extrema locaux et dérivée

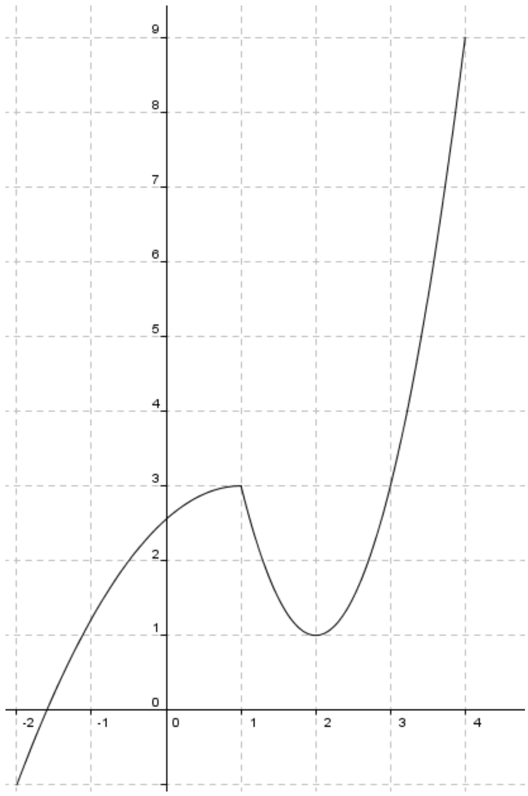
Un extremum désigne un maximum ou un minimum.

Définition : **f est une fonction définie sur un intervalle I et $x_0\in I$.**

- **Dire que $f(x_0)$ est un *maximum local* de f signifie que l'on peut trouver un intervalle *ouvert* J inclus dans I contenant x_0 tel que, pour tout $x\in J$, $f(x)\leqslant f(x_0)$.**
- **Dire que $f(x_0)$ est un *minimum local* de f signifie que l'on peut trouver un intervalle *ouvert* J inclus dans I contenant x_0 tel que, pour tout $x\in J$, $f(x)\geqslant f(x_0)$.**

Exemple : *f est définie sur $[-2;4]$.*

- *3 est un maximum local atteint en $x=1$ car par exemple, pour tout $x\in]0;2[$, $f(x)\leqslant f(1)$ et $f(1)=3$.*
- *1 est un minimum local atteint en $x=2$ car par exemple, pour tout $x\in]0;3[$, $f(x)\geqslant f(2)$ et $f(2)=1$.*
- *-1 est le maximum de f atteint en $x=-2$ car pour tout $x\in[-2;4]$, $f(x)\geqslant f(-2)$ et $f(-2)=-1$. Cependant, ce n'est pas un minimum local, car on ne peut pas trouver d'intervalle ouvert contenant – 2 sur lequel $f(x)\geqslant -1$.*



<u>Théorème :</u> f est une fonction dérivable sur un intervalle *ouvert* I et $x_0 \in I$. Si $f(x_0)$ est un extremum local, alors $f'(x_0)=0$.

<u>Remarque :</u> La réciproque est fausse ! Par exemple, la fonction cube est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée s'annule en $x=0$, mais il n'y a pas d'extremum local en $x=0$, puisque cette fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

<u>Théorème :</u> f est une fonction dérivable sur un intervalle *ouvert* I et $x_0 \in I$. Si f' s'annule en x_0 en changeant de signe, alors $f(x_0)$ est un extremum local.

<u>Exemple :</u> Dans l'exemple du I – b), f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2+2x-1$ admet un maximum local égal à – 2 en $x=-1$.

Chapitre 7 – Suites numériques

I – Généralités sur les suites

Une suite est une liste de nombres partant d'un premier terme.

Le nombre u_n (aussi noté $u(n)$) où $n \in \mathbb{N}$ est le *terme général de rang* n de la suite u – cette suite peut aussi se noter (u_n) .

- u_{n-1} est le terme qui précède u_n , puisque $n-1$ est l'*indice* précédent n ;
- de même, u_{n+1} est le terme qui suit u_n , puisque $n+1$ est l'indice suivant n .

Rang	0	1	$\dots$	$n-1$	n	$n+1$
Terme	u_0	u_1	$\dots$	u_{n-1}	u_n	u_{n+1}

Remarque : On peut donc voir une suite comme une fonction qui à un entier n associe son image u_n , le terme d'indice n .

a) Suite définie par une relation explicite

C'est le cas le plus simple : u_n se calcule en fonction de l'indice n .

Exemple : On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 3$ par $u_n = 3n^2+4$.

Le premier terme est donc $u_3 = 3\times 3^2+4 = 31$ – c'est le terme d'indice 3.

Le deuxième terme est donc $u_4 = 3\times 4^2+4 = 52$ – c'est le terme d'indice 4.

Pour $n \geqslant 3$, le terme d'indice $n+1$ est $u_{n+1} = 3(n+1)^2+4 = 3(n^2+2n+1)+4 = 3n^2+6n+7$.

b) Suite définie par une relation de récurrence

C'est plus complexe : u_{n+1} se calcule en fonction de u_n – c'est-à-dire qu'un terme se calcule en fonction du précédent.

Exemple : On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$ par $v_{n+1} = 3v_n^2+4$ et $v_0 = 0$.

On a donc $v_1 = 3v_0^2+4 = 3\times 0^2+4 = 4$, $v_2 = 3v_1^2+4 = 3\times 4^2+4 = 52$, $v_3 = 3v_2^2+4 = 3\times 52^2+4 = 8116$, ...

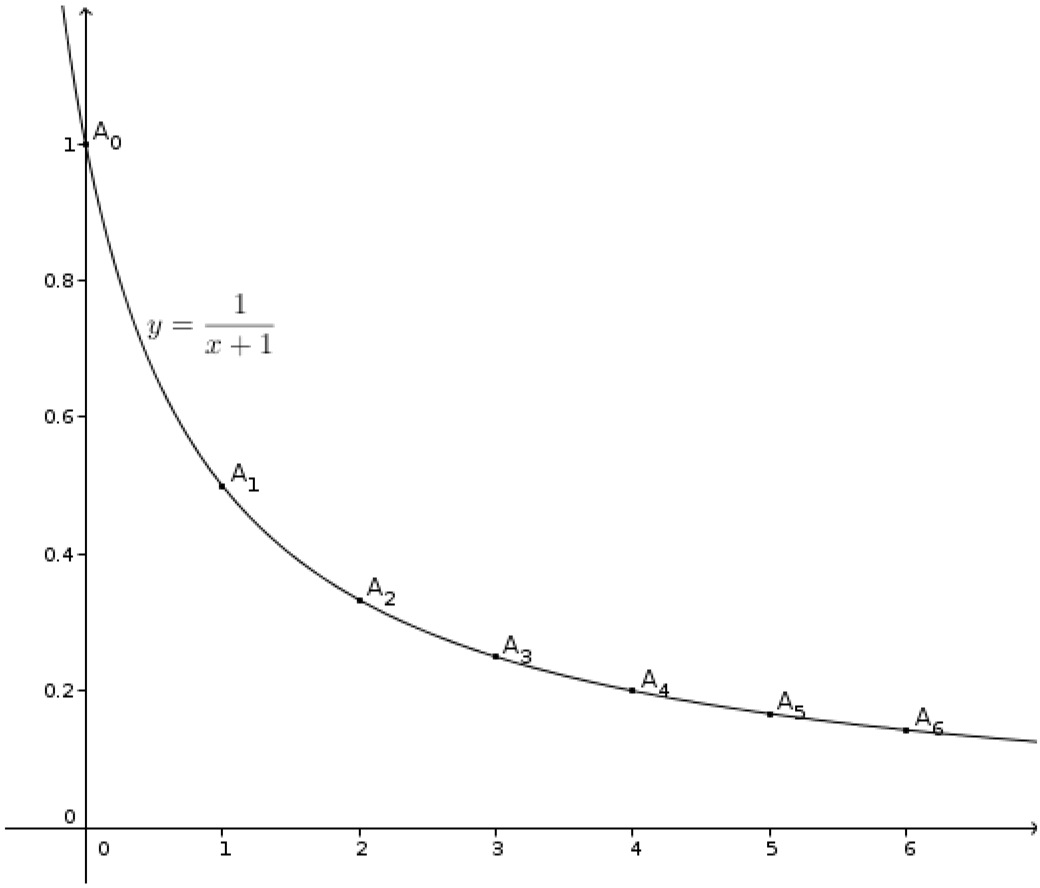
c) Représentation graphique d'une suite

Soit (u_n) une suite numérique. On peut placer les points $A_n(n\,;v_n)$ dans un repère du plan.

Exemple : *Soit* (u_n) *la suite définie pour tout* $n\in\mathbb{N}$ *par* $u_n=\dfrac{1}{n+1}$.

La suite est représentée par les points $A_n\left(n;\dfrac{1}{n+1}\right)$.

Ce sont donc les points de la courbe de la fonction $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ *dont les abscisses appartiennent à* $\mathbb{N}$.



d) Sens de variation d'une suite numérique

Définitions :

- **Une suite numérique (u_n) est croissante si pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}\geqslant u_n$.**
- **Une suite numérique (u_n) est strictement décroissante si pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}\leqslant u_n$.**
- **Une suite numérique (u_n) est strictement croissante si pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}>u_n$.**
- **Une suite numérique (u_n) est strictement décroissante si pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}<u_n$.**

II – Suites arithmétiques

a) Définition

Une suite (u_n) est arithmétique si et seulement si, pour passer d'un terme au suivant, on ajoute toujours la même constante r – c'est-à-dire, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$ avec $r \in \mathbb{R}$. La constante r est la *raison* de la suite arithmétique.

Exemples :

- *Considérons une suite u telle que $u_0 = 3$; $u_1 = 5$ et $u_2 = 8$. $u_1 - u_0 = 2$ et $u_2 - u_1 = 3$ donc la suite n'est pas arithmétique vu que l'on n'ajoute pas la même quantité pour passer de u_0 à u_1 et de u_1 à u_2.*
- *Soit u la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 5n + 6$.*

  Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 5(n+1) + 6 - (5n+6) = 5n + 5 + 6 - 5n - 6 = 5$ donc u est arithmétique de raison 5.

b) Terme général

Illustration : Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.

On a donc :

- $u_1 = u_0 + r$.
- $u_2 = u_1 + r = u_0 + r + r = u_0 + 2r$.
- $u_3 = u_2 + r = u_0 + 2r + r = u_0 + 3r$.
- $\dots$
- $u_n = u_0 + nr$.

Théorème : Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.

On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$.

On a également, pour $n \geqslant 1$, $u_n = u_1 + (n-1)r$.

Remarque : Plus généralement, si u est arithmétique de raison r, pour tous entiers n et p avec $p \leqslant n$, on a $u_n = u_p + (n-p)r$.

Exemple : Soit (u_n) une suite arithmétique de raison 3 telle que $u_0 = 5$.

On alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + n \times 5 = 3 + 5n$. Par exemple, $u_7 = 3 + 5 \times 7 = 38$ et $u_{20} = 3 + 5 \times 20 = 63$ – on pouvait aussi remarquer que $u_{20} = u_7 + 13 \times 5 = 63$.

c) Sens de variation

Théorème : Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 .

- **(u_n) est strictement croissante si et seulement si $r>0$.**
- **(u_n) est strictement décroissante si et seulement si $r<0$.**
- **(u_n) est constante si et seulement si $r>0$.**

d) Représentation graphique

Théorème : Soit (u_n) une suite.

(u_n) est arithmétique si et seulement si elle est représentée par des points alignés.

Preuve :

- Si (u_n) est arithmétique, il existe r tel que $u_n=u_0+nr$. Les points A_n représentant la suite ont donc pour coordonnées $(n;u_0+nr)$. Ils sont donc alignés sur la droite d'équation $y=rx+u_0$.
- Réciproquement, si les points A_n représentant la suite sont alignés sur une droite d'équation $y=ax+b$, alors on a $u_n=an+b$. (u_n) est donc arithmétique de raison a et de premier terme $u_0=b$.

III – Suites géométriques

a) Définition

Une suite (u_n) est géométrique si et seulement si, pour passer d'un terme au suivant, on multiplie toujours par la même constante q – c'est-à-dire, si pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=u_n\times q$ avec $q\in\mathbb{R}$. La constante q est la *raison* de la suite géométrique.

Exemples :

- *Considérons une suite u telle que $u_0=6$; $u_1=3$ et $u_2=1$. $\frac{u_1}{u_0}=\frac{1}{2}$ et $\frac{u_2}{u_1}=\frac{1}{3}$ donc la suite n'est pas géométrique vu que l'on ne multiplie pas par la même quantité pour passer de u_0 à u_1 et de u_1 à u_2 .*
- *Soit u la suite définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $u_n=5\times 3^n$.*

  Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{5\times 3^{n+1}}{5\times 3^n}=\frac{3^{n+1}}{3^n}=3$ donc u est géométrique de raison 3.

b) Terme général

Illustration : Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 .

On a donc :

- $u_1=u_0\times q$.
- $u_2=u_1\times q=u_0\times q\times q=u_0\times q^2$.
- …
- $u_n=u_0\times q^n$.

Théorème : Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 .

On a alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=u_0\times q^n$.

On a également, pour $n\geqslant 1$, $u_n=u_1\times q^{n-1}$.

Remarque : Plus généralement, si u est géométrique de raison q , pour tous entiers n et p avec $p\leqslant n$, on a $u_n=u_p\times q^{n-p}$.

Exemple : Soit (u_n) une suite géométrique de raison 2 telle que $u_0=1$.

On alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=u_0\times 2^n=1\times 2^n=2^n$. Par exemple, $u_7=2^7=128$ et $u_{20}=2^{20}=1\,048\,576$ – on pouvait aussi remarquer que $u_{20}=u_7\times 2^{13}=128\times 2^{13}=1\,048\,576$.

c) Sens de variation

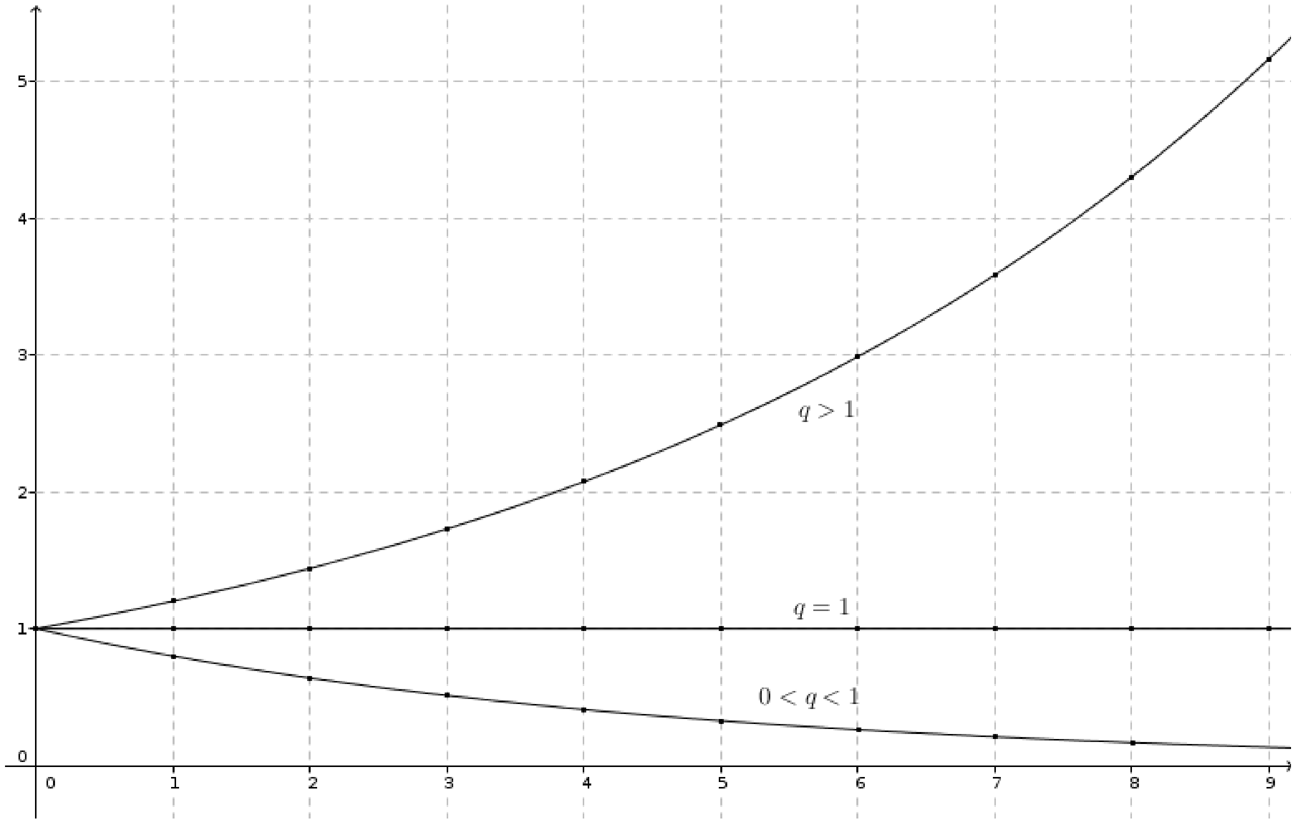
Théorème : Soit q un réel strictement positif.

- **Si $q>1$, la suite géométrique de terme général q^n est strictement croissante.**
- **Si $0<q<1$, la suite géométrique de terme général q^n est strictement décroissante.**
- **Si $q=1$, la suite géométrique de terme général q^n est constante et égale à 1.**

Preuve : Pour $n\in\mathbb{N}$, $q^{n+1}-q^n=q^n(q-1)$. Comme $q>0$, le signe de $q^{n+1}-q^n$ est celui de $q-1$.

- Si $q>1$, $q-1>0$ donc $q^{n+1}-q^n>0$ donc $q^{n+1}>q^n$. (q^n) est strictement croissante.
- Si $0<q<1$, $q-1<0$ donc $q^{n+1}-q^n<0$ donc $q^{n+1}<q^n$. (q^n) est strictement décroissante.
- Si $q=1$, $q-1=0$ donc $q^{n+1}-q^n=0$ donc $q^{n+1}=q^n$. (q^n) est constante et vaut 1.

Illustration :



Remarque : Si $u_0 \neq 0$, le fait de multiplier la suite (q^n) par u_0 inverse le sens de variation si et seulement si $u_0 < 0$.

On en déduit donc ce tableau donnant le sens de variation d'une suite géométrique de premier terme $u_0 \neq 0$ et de raison $q > 0$:

	$q > 1$	$0 < q < 1$	$q = 1$
$u_0 > 0$	Strictement croissant	Strictement décroissant	Constante
$u_0 < 0$	Strictement décroissant	Strictement croissant	Constante

Chapitre 8 – Variables aléatoires

I – Quelques rappels de probabilités

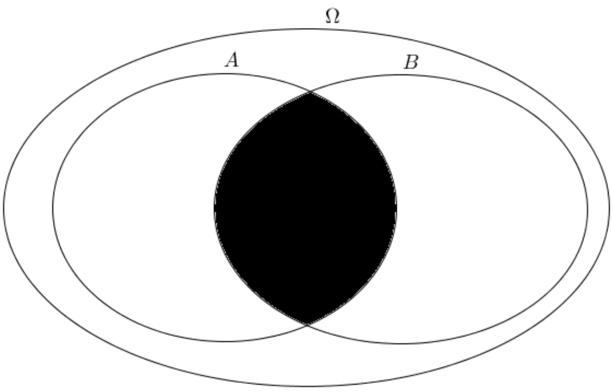
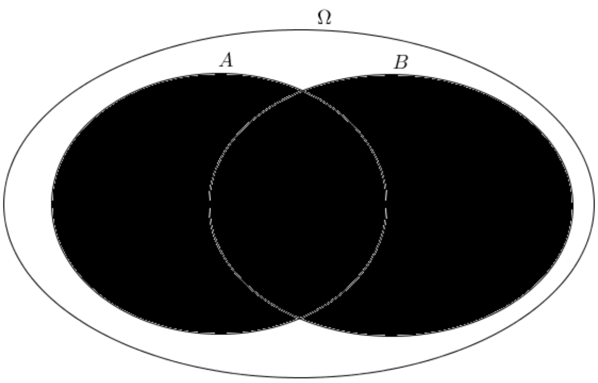
a) Évènements

On considère un univers Ω pour une expérience aléatoire. Un évènement A est une partie de Ω.

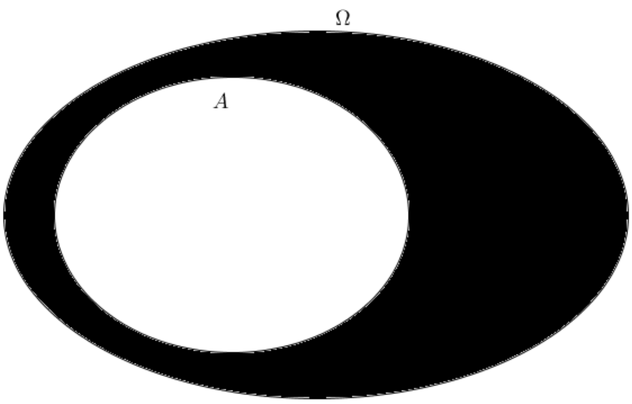
- Lorsqu'une issue ω appartient à un évènement A, on dit que ω réalise A ($\omega \in A$).
- $\emptyset$ est appelé évènement <u>impossible</u>, aucune issue ne le réalise.
- Ω est appelé évènement <u>certain</u>, toutes les issues le réalisent.

Soient A et B deux évènements.

- $A \cap B$ (« A inter B ») est l'évènement formé des issues qui réalisent *à la fois* A et B.
- $A \cup B$ (« A union B ») est l'évènement formé des issues qui réalisent *au moins* l'un des évènements A et B.

$A \cap B$	$A \cup B$
	

- Si aucune issue ne réalise A et B, c'est-à-dire si $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont <u>incompatibles</u>.
- $\overline{A}$ (« A barre ») est l'évènement contraire à l'évènement A. Il est formé des issues qui ne réalisent pas A.



- Pour tous évènements A et B, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

b) Probabilités

On considère une loi de probabilité sur un univers Ω .

- La probabilité d'un évènement A est la somme des probabilités des issues qui le réalisent. On note cette probabilité $P(A)$.
- $P(\emptyset)=0$
- $P(\Omega)=1$
- Pour tout évènement A , $0\leqslant P(A)\leqslant 1$.
- Pour tout évènement A , $P(\overline{A})=1-P(A)$.
- Pour tous évènements A et B , $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.
- Pour tous évènements A et B , $P(\overline{A\cap B})=P(\overline{A}\cup\overline{B})$ et $P(\overline{A\cup B})=P(\overline{A}\cap\overline{B})$.

II – Loi d'une variable aléatoire

a) Variable aléatoire

Définition : Ω est l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire.
Définir une variable aléatoire X sur Ω consiste à associer un nombre réel à chaque issue.

Notation : Soit $x\in\mathbb{R}$. L'évènement « X prend la valeur x » est noté $(X=x)$.

Exemple : *On lance deux fois de suite une pièce de monnaie. On note les côtés apparus : P ou F . On a donc $\Omega=\{PP;PF;FP;FF\}$. Pour chacune de ces issues, on associe le nombre X de fois où pile apparaît. On a alors une variable aléatoire X sur Ω , cette variable prend les valeurs 0, 1 ou 2. On a $(X=0)=\{FF\}$, $(X=1)=\{PF;FP\}$, $(X=2)=\{PP\}$.*

b) Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Théorème et définition : Une loi de probabilité est définie sur Ω . $X(\Omega)=\{x_1;x_2;\ldots;x_n\}$ est l'ensemble des valeurs prises par une variable aléatoire X .
Lorsque l'on associe à chaque valeur x_i la probabilité de l'évènement $(X=x_i)$, on définit une loi de probabilité sur $X(\Omega)$. Cette loi est la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

Exemple : *Pour X variable aléatoire égale au nombre de fois où pile apparaît pour deux lancés consécutifs d'une pièce de monnaie, on a : $P(X=0)=\frac{1}{4}$, $P(X=1)=\frac{1}{2}$ et $P(X=2)=\frac{1}{4}$.*

c) Espérance, variance, écart-type d'une variable aléatoire

Définitions : L'espérance, la variance et l'écart-type d'une variable aléatoire correspondent respectivement à la moyenne, la variance et l'écart-type d'une série statistique, les probabilités jouant le rôle des fréquences.

Théorème : X est une variable aléatoire dont la loi est résumée par le tableau suivant.

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$P(X=x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

Espérance : $E(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i x_1$

Variance : $V(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i(x_i-E(X))^2$ **ce qui équivaut à**

$V(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2-E(X)^2=E(X^2)-E(X)^2$

Écart-type : $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

Exemple : Pour X variable aléatoire égale au nombre de fois où pile apparaît pour deux lancers consécutifs d'une pièce de monnaie, on a : $E(X)=1$, $V(X)=\frac{1}{2}$, $\sigma(X)=\sqrt{\frac{1}{2}}$.

d) Loi de probabilité et distribution des fréquences

Après avoir retenu un modèle pour une expérience aléatoire, on peut simuler cette expérience. On obtient alors, après N simulations, une *série statistique* d'effectif N.
Il y a un lien entre les *fréquences* des issues obtenues et les *probabilités* de ces issues :

Loi des grands nombres : Pour une expérience donnée, les fréquences calculées à l'issue de N simulations se rapprochent des probabilités lorsque N devient grand.

Exemple : Toujours en considérant notre variable aléatoire X « nombre de fois où pile apparait pour deux lancers d'une pièce de monnaie », cela veut dire que lorsque l'on reproduit un grand nombre de fois l'expérience, la moyenne des valeurs de X va se rapprocher de l'espérance mathématique, c'est-à-dire 1 ici.

Chapitre 9 – Loi de Bernoulli et loi binomiale

I – Modélisation d'une répétition d'expériences

a) Expériences indépendantes

<u>Définition :</u> On dit que deux expériences aléatoires sont indépendantes lorsque les résultats de l'une n'influent pas sur les probabilités des issues de l'autre.

<u>Exemple :</u> Dans une urne, il y a trois boules rouges et deux boules vertes.
Expérience 1 : On tire une première boule de l'urne.
Expérience 2 : On tire une deuxième boule de l'urne.

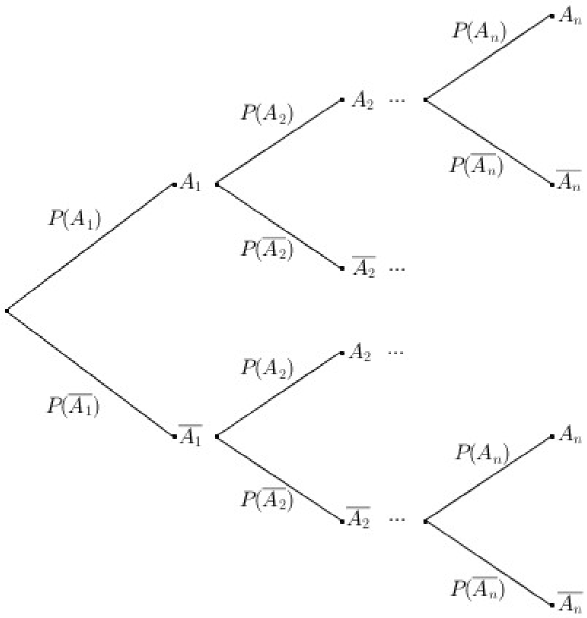
- *Si après l'expérience 1, **on remet la boule dans l'urne**, la probabilité de tirer une boule rouge (ou verte) lors de l'expérience 2 sera la même que dans l'expérience 1.*
  ***Les deux expériences sont indépendantes**.*
- *Si après l'expérience 1, **on ne remet pas la boule dans l'urne**, le contenu de l'urne est modifié. Selon le résultat de l'expérience 1, la probabilité de tirer par exemple une boule rouge lors de l'expérience 2 ne sera pas la même que dans l'expérience 1.*
  ***Les deux expériences ne sont pas indépendantes**.*

<u>Propriété :</u> Quand on répète une même expérience aléatoire dans les *mêmes conditions initiales*, alors les expériences aléatoires sont des *expériences indépendantes*.

<u>Exemple :</u> Si on lance une pièce de monnaie 10 fois de suite, on a 10 expériences indépendantes.

b) Répétition d'une même expérience

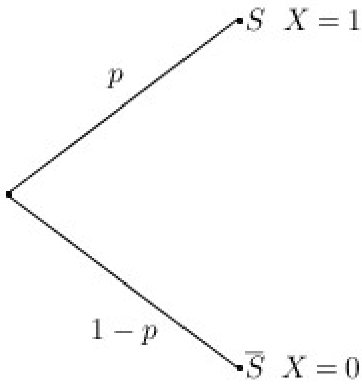
<u>Propriété :</u> On répète n fois de suite une expérience aléatoire dans les mêmes conditions initiales.
Si A_i est un évènement de la i ème expérience (avec i entier entre 1 et n), alors on a :
$\boldsymbol{P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = P(A_1) \times P(A_2) \times ... \times P(A_n)}$ **.**



Cette probabilité correspond au chemin supérieur de l'arbre, qui contient 2^n chemins.

<u>Exemple :</u> On suppose que l'on lance 4 fois une pièce de monnaie truquée : la probabilité d'obtenir « Face » étant 0,7.
On note F_i l'évènement « Obtenir Face au i ème essai ».
La probabilité d'obtenir 4 fois « Face » est donc $P(F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4) = 0{,}7^4 = 0{,}2401$.

II – Loi de Bernoulli



<u>Définition :</u> Soit $p \in [0;1]$. On considère une expérience aléatoire à deux issues :

- **S (appelée succès) avec une probabilité p,**
- **$\overline{S}$ (appelée échec) avec donc une probabilité $1-p$.**

Cette situation constitue une *épreuve de Bernoulli*.
Soit X la variable aléatoire prenant la valeur 1 si S est réalisé et 0 sinon.
La loi de probabilité de X est appelée *loi de Bernoulli*.

x	0	1
$P(X=x)$	$1-p$	p

<u>Exemple :</u> Dans une usine, la probabilité qu'un article fabriqué présente un défaut est 0,02.
Soit X la variable aléatoire qui vaut 1 si l'article présente un défaut et 0 sinon.
X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p=0{,}02$.

<u>Propriétés :</u> Soit X une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $p \in [0;1]$. Alors :

- $\boldsymbol{E(X)=p}$
- $\boldsymbol{V(X)=p(1-p)}$
- $\boldsymbol{\sigma(X)=\sqrt{p(1-p)}}$

<u>Preuves :</u>

- $E(X)=(1-p)\times 0+p\times 1=p$
- $V(X)=E(X^2)-E(X)^2=(1-p)\times 0^2+p\times 1^2-p^2=p-p^2=p(1-p)$
- $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{p(1-p)}$

<u>Exemple :</u> En reprenant l'exemple ci-dessus :

- $E(X)=0{,}02$
- $V(X)=0{,}02(1-0{,}02)=0{,}02\times 0{,}98=0{,}0196$
- $\sigma(X)=\sqrt{0{,}0196}=0{,}14$

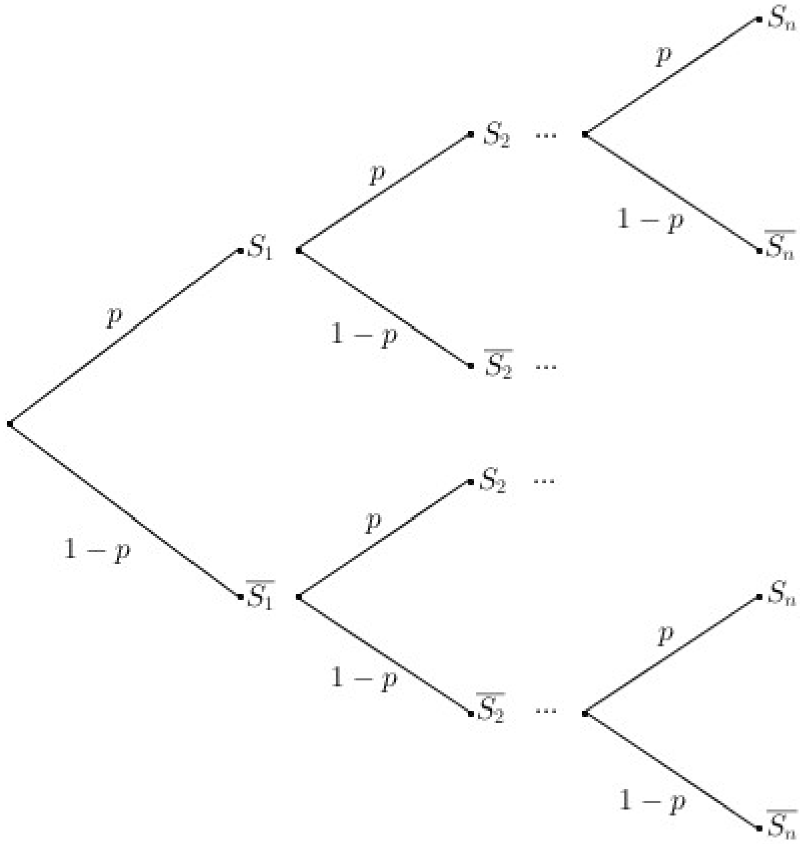
III – Loi binomiale

a) Schéma de Bernoulli

Définition : Lorsqu'on répète une même épreuve de Bernoulli n fois de façons indépendantes, on dit que l'on est en présence d'un *schéma de Bernoulli*.

Cette situation peut être résumée par un arbre :

Cet arbre possède 2^n chemins.



b) Coefficients binomiaux

Définition : Soient n et k deux entiers naturels tels que $0 \leqslant k \leqslant n$.
$\binom{n}{k}$ est appelé *coefficient binomial*, et se lit « combinaison de k parmi n ».
$\binom{n}{k}$ donne le nombre de chemins de l'arbre correspondant à k succès parmi les n répétitions d'une épreuve de Bernoulli.

Remarques : Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

- $\binom{n}{n} = 1$, car un seul chemin représente n succès lors des n répétitions (c'est le chemin supérieur dans l'arbre).
- $\binom{n}{0} = 1$, car un seul chemin représente n échecs lors des n répétitions (c'est le chemin inférieur dans l'arbre).
- $\binom{n}{1} = n$, car n chemins représente 1 succès lors des n répétitions : en effet, cet unique succès peut se produire à la première épreuve, ou à la deuxième, …, ou à la dernière épreuve.

Remarque : La calculatrice permet de calculer n'importe quel coefficient binomial ; on peut calculer $\binom{20}{5}$ ainsi :

- Sur Texas Instruments, l'instruction se trouve dans « math », puis « PRB », puis « Combinaison » : « 20 Combinaison 5 » fournit la valeur souhaitée.
- Sur Casio, l'instruction se trouve dans « OPTN », puis « ► » (F6), puis « PROB », puis « nCr » : « 20 nCr 5 » fournit la valeur souhaitée.

c) Loi binomiale

Définition : On répète une même épreuve de Bernoulli de paramètre $p\in[0;1]$ n fois de façons indépendantes (schéma de Bernoulli). Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de succès (c'est-à-dire le nombre de « 1 ») parmi les n expériences.
Alors, on dit que X suit la *loi binomiale* de paramètres n et p. On note $X\sim B(n;p)$.

Exemple : Si on joue sept fois à un jeu dont la probabilité de gagner à chaque fois est 0,4, la variable aléatoire X représentant le nombre de fois où l'on gagne suit une loi binomiale $B(7;0{,}4)$.

Théorème (loi de probabilité d'une loi binomiale) : Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n\in\mathbb{N}$ et $p\in[0;1]$ ($X\sim B(n;p)$).
Alors, pour $0\leqslant k\leqslant n$, $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.

Preuve : En utilisant l'arbre, on constate que $X=k$ est réalisé si un chemin comporte k succès et donc $n-k$ échecs. En faisant le produit des probabilités des branches, la probabilité d'un tel chemin est donc $p^k(1-p)^{n-k}$. Comme par définition il y a $\binom{n}{k}$ chemins avec k succès, on a le résultat souhaité.

Propriétés : Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p.

- $\boldsymbol{E(X)=np}$
- $\boldsymbol{V(X)=np(1-p)}$
- $\boldsymbol{\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}}$

Exemple : Si X est une variable aléatoire suivant une loi binomiale $B\left(4;\frac{1}{3}\right)$, alors :

$$P(X=3)=\binom{4}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(1-\frac{1}{3}\right)^{4-3}=4\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^1=4\times\frac{1}{27}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{81}$$

$$E(X)=4\times\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$

$$V(X)=4\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{9}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

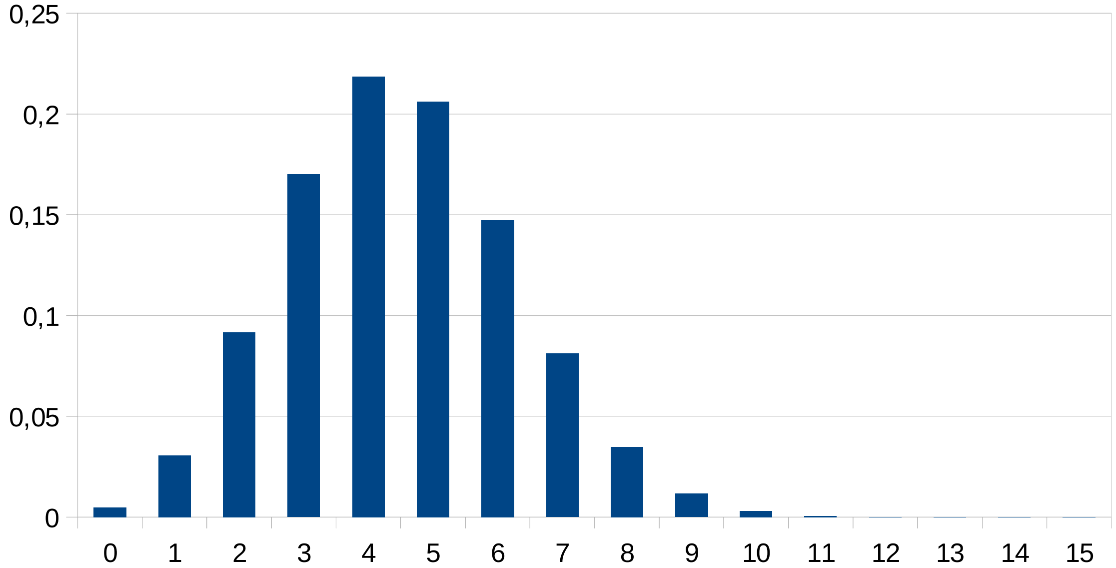
Remarque : La calculatrice permet de calculer les probabilités ; si $X \sim B(20;0,6)$, on peut calculer $P(X=7)$ et $P(X \leqslant 7)$ ainsi :

- Sur Texas Instruments, les instructions se trouvent dans « distrib » (« 2nde », puis « var »).
  - $P(X=7)$: binomFdp(20,0.6,7)
  - $P(X \leqslant 7)$: binomFrép(20,0.6,7)
- Sur Casio, les instructions se trouvent dans « DIST » (« OPTN », puis « STAT » puis « DIST ») puis « BINM ».
  - $P(X=7)$: binomialPD(7,20,0.6)
  - $P(X \leqslant 7)$: binomialCD(7,20,0.6)

IV – Loi binomiale et échantillonnage

a) Représentation graphique d'une loi binomiale

On considère dans cette partie une variable aléatoire X suivant une loi binomiale $B(15;0,3)$.
On construit un diagramme représentant cette loi : en abscisse, ce sont les valeurs k de la variable aléatoire X (avec $0 \leqslant k \leqslant 15$), et en ordonnée, les probabilités $P(X=k)$.



On a $E(X)=15\times 0,3=4,5$. On remarque que les valeurs de X les plus probables sont centrées autour de l'espérance de X : pour des valeurs éloignées de $E(X)$, la probabilité que X prenne ces valeurs est très faible.
En réalité, cette observation est vraie pour n'importe quelle loi binomiale.

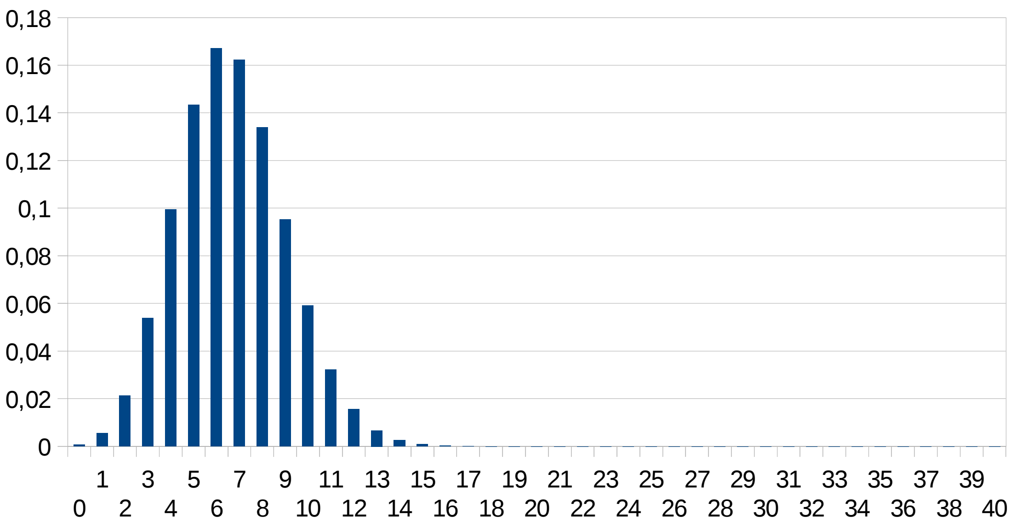
b) Échantillonnage et règle de décision

Exemple : *On cherche à savoir si un dé est truqué. Pour cela, on lance 40 fois un dé et on regarde la fréquence d'apparition de la face 6. Soit X le nombre de fois où 6 apparait.* ***S'il n'est pas truqué****, X suit une loi binomiale de paramètres 40 et $\frac{1}{6}$, et alors $E(X)=40\times\frac{1}{6}=\frac{20}{3}\approx 6{,}67$.*
La face 6 devrait apparaitre en moyenne 6,67 fois environ.
Par calculs, en utilisant la loi de X, on peut déterminer que dans 95 % des cas, X appartient à l'intervalle $\left[\frac{2}{40};\frac{12}{40}\right]$. Il y a donc 95 % de chances que X soit entre 2 et 12.

Définition : Soit $X \sim B(n;p)$. L'intervalle de fluctuation à 95 % d'une fréquence correspondant à la réalisation de X, sur un échantillon aléatoire de taille n, est l'intervalle $\left[\frac{a}{n};\frac{b}{n}\right]$ défini par :

- **a est le plus petit entier tel que $P(X\leqslant a)>0{,}025$.**
- **b est le plus petit entier tel que $P(X\leqslant b)\geqslant 0{,}975$.**

Remarque : $0{,}025=2{,}5\,\%$ et $0{,}975=97{,}5\,\%=100\,\%-2{,}5\,\%$. Pour notre exemple, on a :



Cela veut dire que 95 % environ des valeurs sont dans l'intervalle $[2;12]$, 2,5 % environ des valeurs sont dans $[0;2[$, et 2,5 % environ des valeurs sont dans $]12;40]$.

Règle de décision : Si la fréquence observée f appartient à l'intervalle de fluctuation à 95 % $\left[\frac{a}{n};\frac{b}{n}\right]$, on considère que l'hypothèse selon laquelle la proportion théorique est p dans la population n'est pas remise en question et on l'accepte ; sinon, on rejette l'hypothèse selon laquelle cette proportion vaut p.

Exemple : Si la fréquence observée de la face 6 sur 40 essais appartient à $\left[\frac{2}{40};\frac{12}{40}\right]$, on peut considérer que la face 6 n'est pas truquée ; si elle n'y appartient pas, on peut considérer le dé truqué.