Cours de mathématiques – Première scientifique

Chapitre 1 – Généralités sur les fonctions

I – Rappels sur les fonctions

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

Une fonction f définie sur une partie D de $\mathbb{R}$ transforme tout réel $x \in D$ en un unique réel noté $f(x)$, que l'on appelle *image* de x par f.

<u>*Exemples :*</u>

- *La fonction carré est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$.*
- *La fonction inverse est la fonction g définie sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ par $g(x)=\frac{1}{x}$.*

II – La fonction racine carrée

La fonction racine carrée est la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}$.
Elle est définie sur $[0;+\infty[$ car seuls les réels positifs ont une racine carrée.
Une racine carrée est toujours positive.

<u>a) Sens de variation</u>

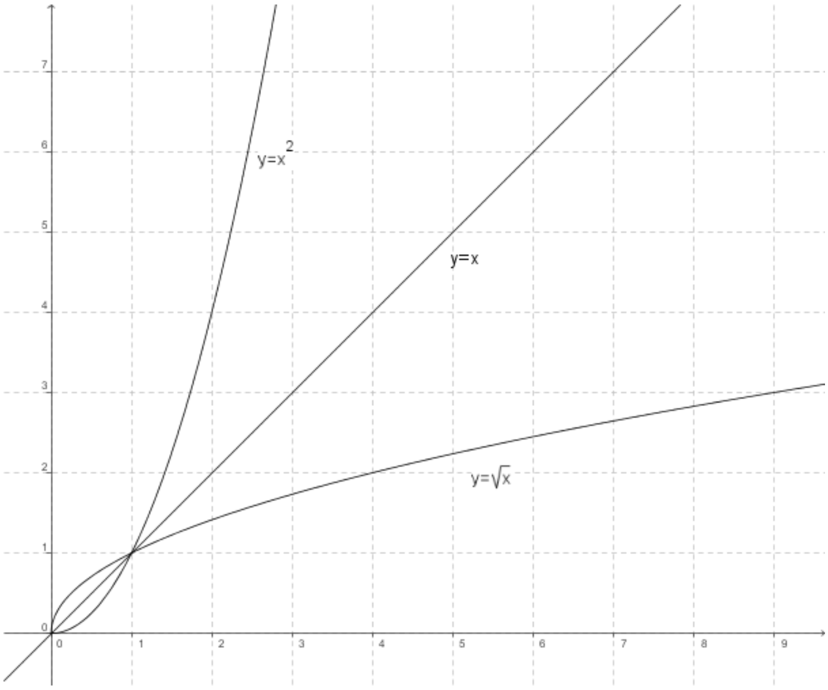
La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

<u>Preuve :</u> Soient a et b deux réels tels que $0 \le a < b$. On remarque que $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})=\sqrt{a}^2-\sqrt{b}^2=a-b$, donc comme $\sqrt{a}+\sqrt{b}\neq 0$, $\boldsymbol{\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}}$.
Comme $0 \le a < b$, $a-b<0$ et $\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$, donc $\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}<0$, c'est-à-dire $\sqrt{a}-\sqrt{b}<0$.
La fonction racine carrée est donc strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

x	0	$+\infty$
f	0	$\nearrow$

b) Représentation graphique

Les fonctions carré et racine carrée étant réciproques l'une de l'autre sur $[0;+\infty[$, leurs courbes dans un repère orthonormal sont symétriques par rapport à la droite $y=x$.



c) Comparaison

Sur $[0;+\infty[$, les fonctions f , g et h définies par $f(x)=x^2$, $g(x)=x$ et $h(x)=\sqrt{x}$ sont toutes strictement croissantes. Graphiquement, on peut constater le résultat suivant :

Théorème :

- **Sur $]1;+\infty[$, $\sqrt{x}<x<x^2$.**
- **Sur $]0;1[$, $\sqrt{x}>x>x^2$.**
- **Si $x=0$ ou $x=1$, $\sqrt{x}=x=x^2$.**

Preuve : Comparons sur $[0;+\infty[$ les fonctions $f(x)=x^2$ et $g(x)=x$.
Pour $x\geqslant 0$, $f(x)-g(x)=x^2-x=x(x-1)$. Étudions le signe de cette quantité :

$\boldsymbol{x}$	0		1		$+\infty$
x	0	+	|	+	
$x-1$	|	–	0	+	
$\boldsymbol{x(x-1)}$	**0**	**–**	**0**	**+**	

On en déduit que sur $]0;1[$, $f(x)-g(x)<0$ donc que $f(x)<g(x)$, que sur $]1;+\infty[$, $f(x)-g(x)>0$ donc que $f(x)>g(x)$, et que si $x=0$ ou $x=1$, $f(x)-g(x)=0$ donc que $f(x)=g(x)$.
La comparaison entre les fonctions $g(x)=x$ et $h(x)=\sqrt{x}$ se traite de manière analogue.

III – La fonction valeur absolue

a) Définition

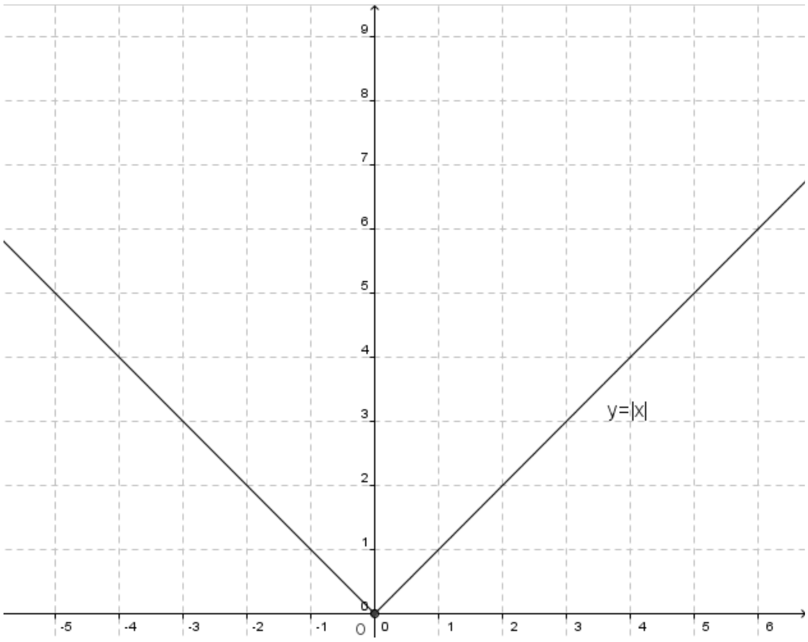
Soit $x \in \mathbb{R}$. La valeur absolue de x, notée $|x|$, est la distance entre les réels x et 0.
La fonction valeur absolue est donc définie par :
$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}.$$

Exemples : $|8{,}2| = 8{,}2$; $|-8{,}2| = 8{,}2$; $|0| = 0$.

b) Représentation graphique

La fonction valeur absolue étant définie sur $\mathbb{R}$ par $|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$, sa représentation graphique dans un repère est l'union de deux demi-droites.

On remarque que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|-x| = |x|$. La fonction valeur absolue est donc *paire*.



c) Distance entre deux réels

La distance entre deux réels x et y, notée $d(x;y)$, est égale à $|x-y|$.

Exemples : La distance entre les réels 5 et – 3 est 8 ; on a bien $|5-(-3)| = |5+3| = |8| = 8$.
De même $d(-7;2) = 9$ *et* $|-7-2| = |-9| = 9$.

Application : Résoudre dans $\mathbb{R}$ $|x-9| = 2$.

Application : Résoudre dans $\mathbb{R}$ $|x+2| \leqslant 3$.

IV – Étude des variations

<u>Rappels :</u> Soit f une fonction définie sur un <u>intervalle</u> I .

- **On dit que f est *croissante* sur I si pour tous $a<b$ de I , $f(a)\leq f(b)$.**
- **On dit que f est *strictement croissante* sur I si pour tous $a<b$ de I , $f(a)<f(b)$.**
- **On dit que f est *décroissante* sur I si pour tous $a<b$ de I , $f(a)\geq f(b)$.**
- **On dit que f est *strictement décroissante* sur I si pour tous $a<b$ de I , $f(a)>f(b)$.**

Une fonction f est *monotone* sur I si elle est croissante (ou décroissante) sur I ; elle est *strictement monotone* sur I si elle est strictement croissante (ou strictement décroissante) sur I .

<u>a) Sens de variation et ajout d'une constante</u>

<u>Propriété :</u> Soit f une fonction monotone sur un intervalle I et $\lambda\in\mathbb{R}$.
Les fonctions f et $f+\lambda$ (définie sur I par $(f+\lambda)(x)=f(x)+\lambda$) ont le même sens de variation sur I .

<u>Preuve :</u>

- Si f est strictement croissante sur I , pour tous réels $a<b$ de I on a $f(a)<f(b)$.
  En ajoutant λ aux deux membres, on a $f(a+\lambda)<f(b)+\lambda$. La fonction $f+\lambda$ est donc strictement croissante sur I .
- Si f est strictement décroissante sur I , pour tous réels $a<b$ de I on a $f(a)>f(b)$.
  En ajoutant λ aux deux membres, on a $f(a+\lambda)>f(b)+\lambda$. La fonction $f+\lambda$ est donc strictement croissante sur I .

Dans tous les cas, f et $f+\lambda$ ont le même sens de variation sur I .

<u>b) Sens de variation et multiplication par une constante</u>

<u>Propriété :</u> Soit f une fonction monotone sur un intervalle I et $\lambda\neq 0$. La fonction λf est définie sur I par $(\lambda f)(x)=\lambda\times f(x)$.

- **Si $\lambda>0$, les fonctions f et λf ont le même sens de variation sur I .**
- **Si $\lambda<0$, les fonctions f et λf ont des sens de variation contraires sur I .**

<u>Preuve :</u> On traitera le cas où f est strictement croissante sur I (le cas strictement décroissante est analogue). Si f est strictement croissante sur I , pour tous réels $a<b$ de I on a $f(a)<f(b)$.

- Si $\lambda>0$, en multipliant par λ , on a $\lambda f(a)<\lambda f(b)$, donc la fonction λf est strictement croissante sur I . f et λf ont le même sens de variation.
- Si $\lambda<0$, en multipliant par λ , on a $\lambda f(a)>\lambda f(b)$, donc la fonction λf est strictement décroissante sur I . f et λf ont des sens de variation contraires.

c) Sens de variation et racine carrée

Propriété : Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et J un intervalle sur lequel la fonction f est positive ou nulle. Alors, sur J, les fonctions f et g définie par $g(x)=\sqrt{f(x)}$ ont le même sens de variation.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=x^2$.
Sur $[0;+\infty[$, $f(x)\geqslant 0$ donc la fonction $g(x)=\sqrt{f(x)}$ est bien définie sur $[0;+\infty[$.
On sait que f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.
D'après la propriété, g a le même sens de variation que f sur $[0;+\infty[$, donc g est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.
On pouvait remarquer que sur $[0;+\infty[$, $g(x)=\sqrt{x^2}=x$ et donc g est bien une fonction strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

d) Sens de variation et inversion

Propriété : Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et J un intervalle sur lequel la fonction f est toujours strictement positive ou toujours strictement négative. Alors, sur J, les fonctions f et g définie par $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ ont des sens de variation contraires.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=x^2$.
Sur $]0;+\infty[$, $f(x)>0$ donc la fonction $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ est bien définie sur $]0;+\infty[$.
On sait que f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.
D'après la propriété, g a le sens de variation contraire à celui de f sur $]0;+\infty[$, donc g est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

Chapitre 2 – Fonctions polynômes du second degré

I – Définitions

<u>Définition :</u> On appelle *fonction polynôme* du second degré (ou *trinôme* du second degré) toute fonction P définie sur $\mathbb{R}$ pour laquelle il existe des réels $a \neq 0$, b, c tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait : $P(x) = a x^2 + b x + c$.
L'expression $a x^2 + b x + c$ est appelée <u>un polynôme du second degré</u>.

<u>Exemple :</u> La fonction carré f est une fonction polynôme du second degré, puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) = x^2 = 1 x^2 + 0 x + 0$. On a ici $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$.

<u>Définition :</u> Soient P un polynôme du second degré et x_0 un réel.
On dit que x_0 est une *racine réelle* de P lorsque $P(x_0) = 0$.

<u>Exemple :</u> Soit $P(x) = 3 x^2 - 2 x - 5$.
$P(0) = -5$ donc 0 n'est pas une racine de P. $P\left(\frac{5}{3}\right) = 0$ donc $\frac{5}{3}$ est une racine de P.

II – Forme canonique d'un trinôme du second degré

<u>Théorème :</u> Un trinôme P du second degré $P(x) = a x^2 + b x + c$ (avec $a \neq 0$) s'écrit de façon unique sous la forme $P(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$, où $P(\alpha) = \beta$.
La forme $P(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ est appelée *forme canonique* du trinôme P.

<u>Preuve :</u> $P(x) = a x^2 + b x + c$. Comme $a \neq 0$, on peut factoriser par a les deux premiers termes :
$P(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a} x\right) + c$.

Considérons que $x^2 + \frac{b}{a} x$ est le début du développement de l'identité $(A + B)^2 = A^2 + 2 A B + B^2$:
comme $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + 2 x \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a} x + \frac{b^2}{4a^2}$, on a $\boldsymbol{x^2 + \frac{b}{a} x} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}$.

On remplace dans $P(x)$, puis on développe a :
$P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$.
On met au même dénominateur les deux derniers termes :
$P(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2}{4a} - \frac{4ac}{4a}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$.
On remarque que $P(\alpha) = a(\alpha - \alpha)^2 + \beta = a \times 0 + \beta = \beta$.

Théorème : **On a donc $\alpha=-\dfrac{b}{2a}$ et $\beta=-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$.**

a) Discriminant d'un trinôme du second degré

Définition : **Soit P un trinôme du second degré de forme réduite $P(x)=ax^2+bx+c$ (avec $a\neq 0$). On appelle discriminant du trinôme le réel noté Δ défini par $\Delta=b^2-4ac$.**

La forme canonique de P s'écrit donc : $P(x)=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Exemple : Soit $P(x)=8x^2-3x+1$. Calculons le discriminant ($a=8$, $b=-3$, $c=1$) :
$\Delta=(-3)^2-4\times 8\times 1=-23$.
La forme canonique de P est donc $P(x)=8\left(x+\dfrac{-3}{2\times 8}\right)^2-\dfrac{-23}{4\times 8}=8\left(x-\dfrac{3}{16}\right)^2+\dfrac{23}{32}$.

b) Forme canonique et sens de variation

Soit P une fonction polynôme du second degré de forme réduite $P(x)=ax^2+bx+c$ avec $a\neq 0$.
Sa forme canonique est donc $P(x)=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a}$, avec $\Delta=b^2-4ac$.

Théorème : **On a comme tableau de variation pour P sur $\mathbb{R}$:**

Si $a<0$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
P		$\nearrow$	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	$\searrow$	

Si $a>0$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
P		$\searrow$	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	$\nearrow$	

Preuve : La fonction P peut être vue comme l'enchaînement suivant :

$$x\rightarrow x+\frac{b}{2a}\rightarrow\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\rightarrow a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\rightarrow a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}$$

- On part du tableau de variation de la fonction $x\rightarrow x+\dfrac{b}{2a}$, qui est une fonction affine croissante :

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
$x+\dfrac{b}{2a}$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

- La fonction carré est strictement croissante sur $[0+\infty[$ et strictement décroissante sur

$]-\infty;0]$:

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
$\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$	↘	0	↗

- On multiple par a, le sens de variation dépend de son signe :

Si $a<0$				Si $a>0$			
x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$	x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
$a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$	↗	0	↘	$a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$	↘	0	↗

- On ajoute $-\dfrac{\Delta}{4a}$, cela ne modifie pas le sens de variation :

Si $a<0$				Si $a>0$			
x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$	x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
P	↗	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	↘	P	↘	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	↗

c) Représentation graphique

En admettant que la fonction P est représentée par une parabole, on a ce résultat immédiat :

Théorème : La courbe représentative de la fonction $P(x)=ax^2+bx+c$ (avec $a\neq 0$) est une parabole dont le sommet S a pour coordonnées $\left(-\dfrac{b}{2a};-\dfrac{\Delta}{4a}\right)$.

Exemple : Soit $P(x)=x^2-x-12$.
$\Delta=(-1)^2-4\times1\times(-12)=1+48=49$

Le sommet de la parabole a pour coordonnées $S\left(-\dfrac{-1}{2\times1};-\dfrac{49}{4\times1}\right)$, soit $S\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{49}{4}\right)$.

d) Racines et factorisation d'un trinôme du second degré

Théorème : Soit $P(x)=ax^2+bx+c$, avec $a\neq 0$ un trinôme du second degré et Δ son discriminant.

- **Si $\Delta>0$, alors P admet deux racines réelles *distinctes* :**
  $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$.
- **Si $\Delta=0$, alors P admet une seule racine réelle, appelée racine *double* :**
  $x_0=-\dfrac{b}{2a}$ et, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $P(x)=a(x-x_0)^2$.
- **Si $\Delta<0$, alors P n'admet aucune racine réelle, et on ne peut pas factoriser $P(x)$.**

Exemples :

- $P(x)=5x^2-10x-5$
- $Q(x)=x^2-4x\sqrt{3}+12$
- $R(x)=3x^2-4x+2$

Preuve : La forme canonique étant $P(x)=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a}$, on factorise les deux termes par $a\neq 0$: $P(x)=a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$.

- Si $\Delta>0$, on a $P(x)=a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\left(\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right]$, et on peut factoriser à l'aide d'une identité remarquable :
  $P(x)=a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}+\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\dfrac{b}{2a}-\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right]=a\left(x-\left(\dfrac{-b}{2a}-\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right)\left(x-\left(\dfrac{-b}{2a}+\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right)$ donc
  $P(x)=a\left(x-\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x-\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$. On a obtenu la factorisation cherchée, et en résolvant l'équation produit $P(x)=0$ avec $a\neq 0$, on obtient comme racines distinctes $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta=0$, on a donc $P(x)=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=a\left(x-\dfrac{-b}{2a}\right)^2$. On a bien la factorisation souhaitée, et en résolvant l'équation produit $P(x)=0$ avec $a\neq 0$, on obtient comme racine $-\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta<0$, $-\dfrac{\Delta}{4a^2}>0$ donc $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}>0$. Donc, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $P(x)\neq 0$. P n'a donc pas de racine réelle.
  Supposons que l'on puisse factoriser P. P étant de degré 2, on pourrait le factoriser par $(x-x_0)$, x_0 étant un réel. $P(x_0)=0$ puisque $x_0-x_0=0$, donc x_0 serait une racine, or P n'en a pas. Donc on ne peut pas factoriser P.

Remarques : Le cas $\Delta=0$ correspond au cas où, après avoir factorisé P par $a\neq 0$, on peut utiliser directement une identité remarquable. Le cas $\Delta=0$ peut être vu comme un cas particulier de $\Delta>0$: on a alors $x_1=x_0$ et $x_2=x_0$, ce qui justifie l'utilisation de l'expression « racine double ».

e) Signe d'un trinôme

En dressant le tableau de signe de $P(x)$ lorsque $\Delta \geqslant 0$, ou en remarquant comme nous l'avons fait que si $\Delta < 0$ $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}>0$, on peut en déduire les tableaux de signe de $P(x)$:

Propriété : **Soit $P(x)=ax^2+bx+c$ avec $a\neq 0$.**

- **Si $\Delta>0$, on a ce tableau de signe (on appelle x_1 la plus petite racine)**

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$P(x)$		**Signe de a**	**0**	**Signe de $-a$**	**0**	**Signe de a**	

- **Si $\Delta=0$, on a ce tableau de signe :**

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$P(x)$		**Signe de a**	**0**	**Signe de a**	

- **Si $\Delta<0$, on a ce tableau de signe :**

x	$-\infty$		$+\infty$
$P(x)$		**Signe de a**	

En résumé, le trinôme est du signe de a sauf entre les racines lorsque $\Delta>0$.

f) Racines éventuelles et sommet

Propriété : **Soit $P(x)=ax^2+bx+c$ avec $a\neq 0$.**

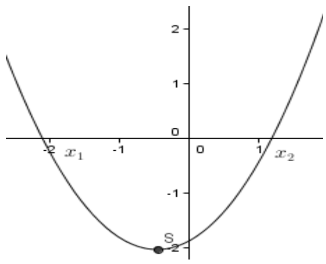
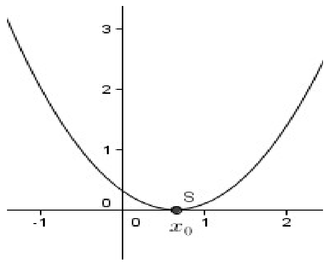
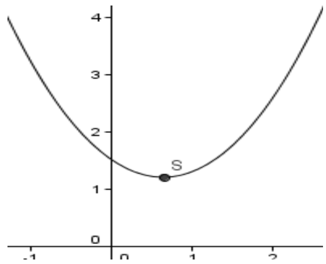
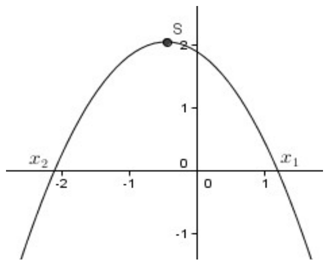
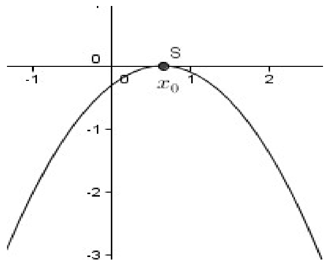
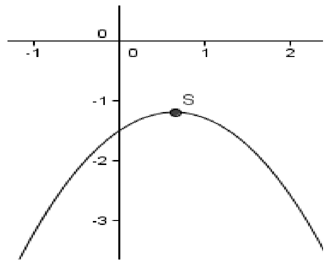
- **Si $\Delta<0$, il n'y a pas de racine réelle.**
- **Si $\Delta=0$, la racine réelle double x_0 est l'abscisse du sommet de la parabole α :**
  $\alpha=x_0=-\frac{b}{2a}$. Ce sommet est sur l'axe de abscisses puisque $\beta=0$.
- **Si $\Delta>0$, la moyenne des deux racines réelles est égale à l'abscisse du sommet :**
  $\alpha=\frac{x_1+x_2}{2}$. Graphiquement, c'est une conséquence du fait que la parabole est symétrique par rapport à la droite $x=\alpha$.

III – Tableau récapitulatif des trinômes du second degré

$$P(x) = a x^2 + b x + c \text{ (avec } a \neq 0\text{)}$$

Discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$

Coordonnées du sommet $S\left(-\dfrac{b}{2a} ; -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
Solutions de l'équation $a x^2 + b x + c = 0$	$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ (racine double)	Pas de solution
Factorisation de $a x^2 + b x + c$	$a(x - x_1)(x - x_2)$	$a(x - x_0)^2$	Pas de factorisation
Sommet $S(\alpha ; \beta)$ et racines	$\alpha = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$	$\alpha = x_0$ et $\beta = 0$	
Représentation graphique quand $a > 0$			
Représentation graphique quand $a < 0$			
Signe de $a x^2 + b x + c$	x : $-\infty$ … x_1 … x_2 … $+\infty$ $P(x)$: signe de a … 0 … signe de $-a$ … 0 … signe de a si x_1 la plus petite racine	x : $-\infty$ … x_0 … $+\infty$ $P(x)$: signe de a … 0 … signe de a	x : $-\infty$ … $+\infty$ $P(x)$: signe de a

Chapitre 3 – Trigonométrie

I – Mesure des angles orientés

$(O\,;I\,,J)$ est un repère orthonormal du plan.

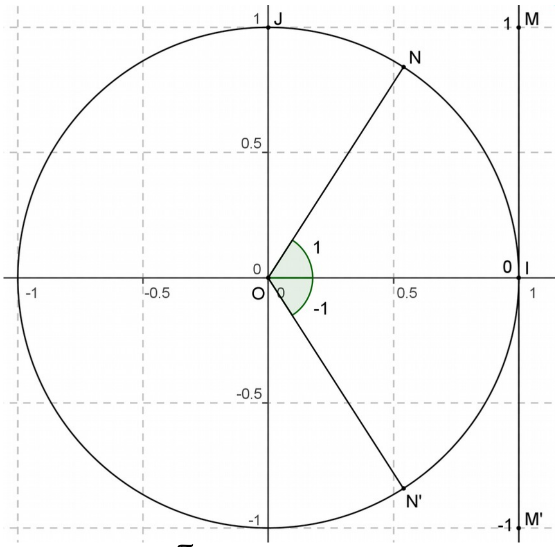
<u>a) Angles orientés et cercle trigonométrique</u>

<u>Définition :</u> Le cercle de centre O et de rayon 1 est appelé cercle trigonométrique.

- On place en I la droite des réels, tangente au cercle – c'est donc une droite graduée parallèle à l'axe des ordonnées, dont l'origine est en I.
- On considère un point M de la droite des réels d'abscisse x – attention, l'abscisse correspond ici à l'abscisse **par rapport aux graduations de la droite des réels ; cela correspond en un sens à l'ordonnée de ce point !** (voir figure)
- On enroule la droite des réels autour du cercle, le point M va donc coïncider avec un unique point N du cercle.

Le nombre x sera, en radians, une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}\,,\overrightarrow{ON})$.

L'exemple qui suit illustre la situation pour M, d'abscisse 1, et M', d'abscisse -1.



<u>Le plan est orienté :</u> On enroule la droite à partir du point I, en tournant *dans le sens inverse des aiguilles d'une montre* (pour les mesures positives). Pour les mesures négatives, on enroule *dans le sens des aiguilles d'une montre*...

<u>Lien avec les degrés :</u> Par proportionnalité, on remarque que pour passer d'une mesure en degrés à une mesure en radians, on multiplie par $\frac{\pi}{180}$. Pour passer d'une mesure en radians à une mesure en degrés, on multiplie par $\frac{180}{\pi}$.

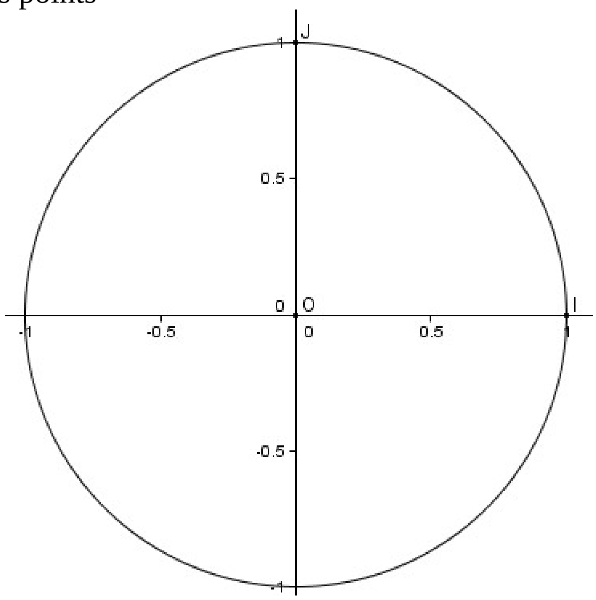
<u>Exemples :</u> 90° correspond à $\frac{\pi}{2}$.

$\frac{\pi}{3}$ correspond à 60°.

Pour les radians, on n'écrit pas l'unité.

Application : Plaçons sur le cercle trigonométrique les points

N_1 tel que $(\vec{OI}, \vec{ON_1}) = \pi$
N_2 tel que $(\vec{OI}, \vec{ON_2}) = \frac{\pi}{2}$
N_3 tel que $(\vec{OI}, \vec{ON_3}) = \frac{\pi}{4}$
N_4 tel que $(\vec{OI}, \vec{ON_4}) = \frac{3\pi}{4}$
N_5 tel que $(\vec{OI}, \vec{ON_5}) = \frac{3\pi}{2}$
N_6 tel que $(\vec{OI}, \vec{ON_6}) = -\pi$
N_7 tel que $(\vec{OI}, \vec{ON_7}) = -\frac{2\pi}{3}$
N_8 tel que $(\vec{OI}, \vec{ON_8}) = \frac{\pi}{6}$



Remarque : Pour un angle, on remarque que la mesure n'est pas unique ; comme 2π est une mesure de l'angle total, on en déduit que si x est une mesure d'un angle donné, toutes les mesures de cet angle sont données par $x+2\pi k$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Définition : Tout angle orienté a une unique mesure appartenant à l'intervalle $]-\pi ; \pi]$. Cette mesure est appelée mesure principale de l'angle.

Application : La mesure principale de $(\vec{OI}, \vec{ON_2})$ est $\frac{\pi}{2}$.

La mesure principale de $(\vec{OI}, \vec{ON_5})$ est $-\frac{\pi}{2}$.

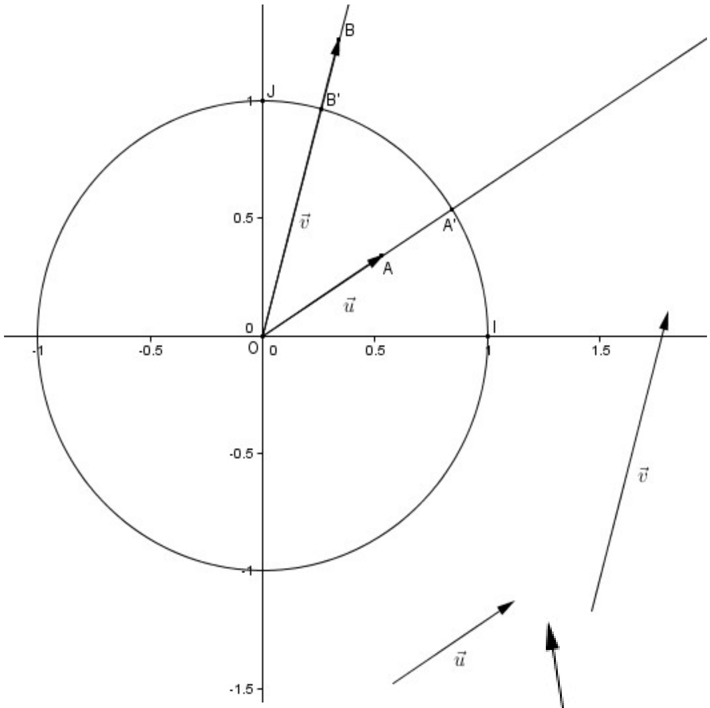
On donne $(\vec{OI}, \vec{OA}) = \frac{351\pi}{4}$. Déterminons sa mesure principale :

$351 = 4 \times 88 - 1$ donc $\frac{351\pi}{4} = \frac{(4 \times 88 - 1)\pi}{4} = \frac{4 \times 88\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 88\pi - \frac{\pi}{4}$.

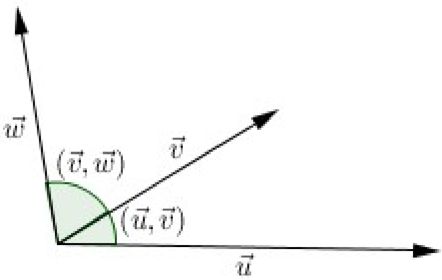
La mesure principale cherchée est $-\frac{\pi}{4}$.

b) Mesure d'un angle de vecteurs non nuls

Définition : $\vec{u}$ **et** $\vec{v}$ **sont deux vecteurs non nuls tels que** $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ **et** $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$ **.**
A' **et** B' **sont les points d'intersection des demi-droites** $[OA)$ **et** $[OB)$ **avec le cercle trigonométrique de centre** O **.**
Les mesures en radians de l'angle $(\vec{u},\vec{v})$ **sont les mesures en radians de l'angle** $(\overrightarrow{OA'},\overrightarrow{OB'})$ **.**

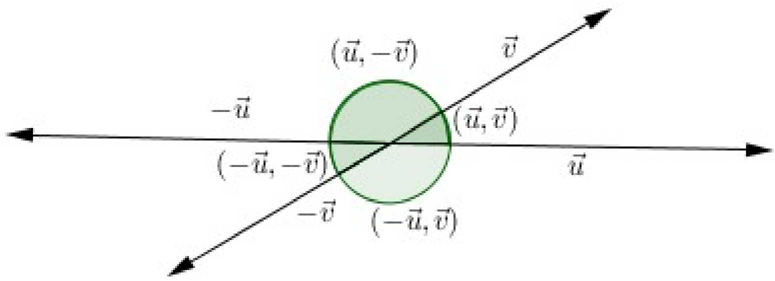


Relation de Chasles : Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$ **,** $\vec{v}$ **et** $\vec{w}$ **,**
on a $(\vec{u},\vec{v})+(\vec{v},\vec{w})=(\vec{u},\vec{w})$ **.**



Conséquences : Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$ **et** $\vec{v}$ **, on a :**

- $(\vec{v},\vec{u})=-(\vec{u},\vec{v})$
- $(-\vec{u},-\vec{v})=(\vec{u},\vec{v})$
- $(\vec{u},-\vec{v})=(\vec{u},\vec{v})+\pi$
- $(-\vec{u},\vec{v})=(\vec{u},\vec{v})+\pi$



Remarque : On ne change pas la mesure d'un angle orienté $(\vec{u},\vec{v})$ en remplaçant l'un ou l'autre des vecteurs par un vecteur colinéaire de même sens.

Exemple : Pour tous vecteurs $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *non nuls, on a* $(2\vec{u},3\vec{v})=(\vec{u},\vec{v})$.

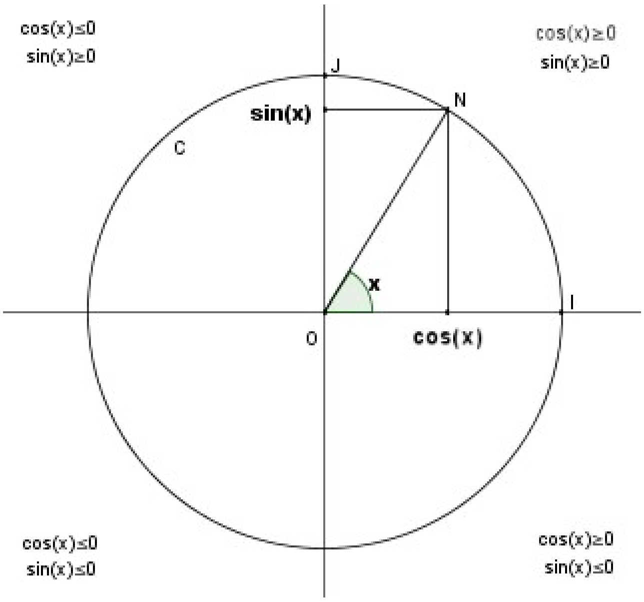
II – Cosinus et sinus

$(O ; I , J)$ est un repère orthonormal du plan, C est le cercle trigonométrique de centre O .

a) Cosinus et sinus d'un réel

Définitions : N est le point de C image du réel x . Le *cosinus* de x noté $\cos(x)$ est l'abscisse de N dans le repère $(O ; I , J)$; le *sinus* de x noté $\sin(x)$ est l'ordonnée de N dans le repère $(O ; I , J)$.

cos et *sin* sont donc deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$.



Propriétés fondamentales : Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{Z}$, on a :

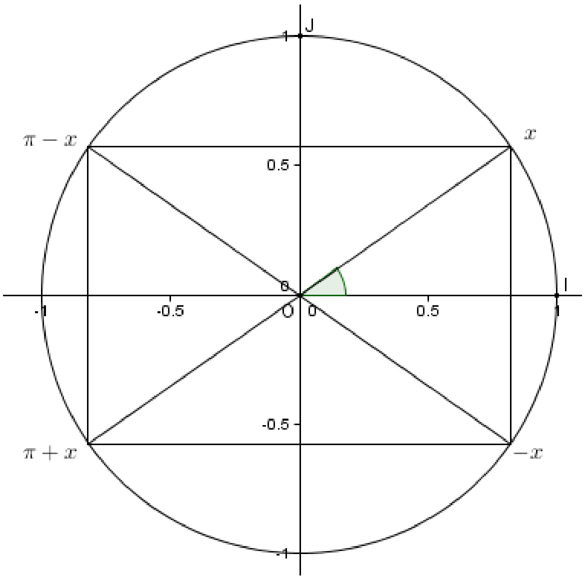
- $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ **et** $-1 \leq \sin(x) \leq 1$
- $\cos(x+2\pi k)=\cos(x)$ **et** $\sin(x+2\pi k)=\sin(x)$ **; on dit que les fonctions *cos* et *sin* sont *périodiques*, de période 2π .**
- $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$ **; c'est le théorème de Pythagore.**

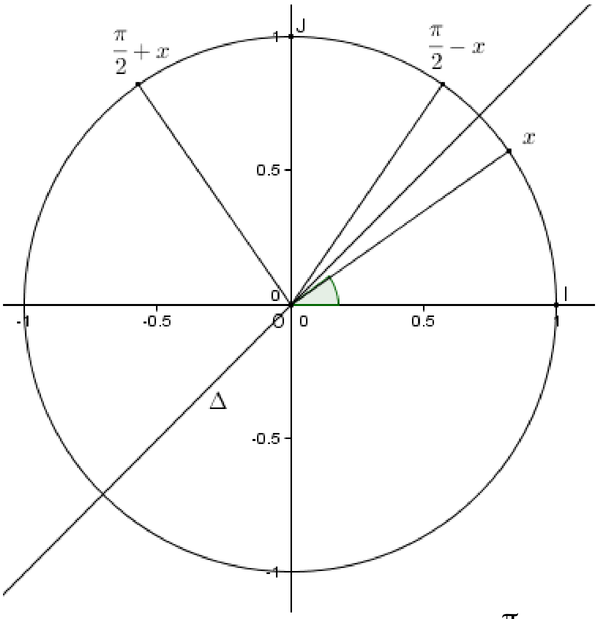
b) Cosinus et sinus d'un angle orienté

Si α et β sont deux mesures en radians de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha=\beta+2\pi k$.
On en déduit que $\cos(\alpha)=\cos(\beta)$ et que $\sin(\alpha)=\sin(\beta)$, puisque les fonctions *cos* et *sin* sont périodiques de période 2π .

Définition : le cosinus (ou le sinus) d'un *angle orienté* est le cosinus (ou le sinus) d'une mesure en radians de cet angle orienté.

c) Cosinus et sinus d'angles associés





Les points images des réels x ; $-x$; $\pi - x$ et $\pi + x$ sont les sommets d'un rectangle dont les droites (OI) et (OJ) sont axes de symétrie.

Les points images des réels x et $\frac{\pi}{2} - x$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice Δ, ceux de $\frac{\pi}{2} - x$ et $\frac{\pi}{2} + x$ sont symétriques par rapport à (OJ).

<u>Propriétés :</u> Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$\cos(-x) = \cos(x)$	$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$	$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$
$\sin(-x) = -\sin(x)$	$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$	$\sin(\pi - x) = \sin(x)$

La fonction *cos* est **paire** et la fonction *sin* est **impaire**.

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$

d) Valeurs usuelles

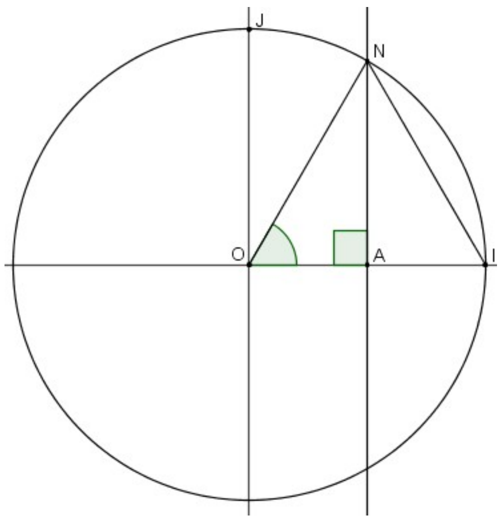
Déterminons $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ainsi que $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$:

$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)>0$ car $0<\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}$.
$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ d'après les angles associés, donc $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$.
D'après le théorème de Pythagore, $\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$ donc $2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$.

On en déduit que $\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$, et comme $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)>0$, alors $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et

$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Déterminons $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$:



On peut remarquer que ONI est équilatéral, et donc que A, pied de la hauteur issue de N, est le milieu de $[OI]$:

$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=OA=\frac{1}{2}$ car $OI=1$.
D'après le théorème de Pythagore, on a $\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right)=1$

donc $\frac{1}{4}+\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right)=1$.

On en déduit que $\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{4}$. Comme $0<\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2}$,

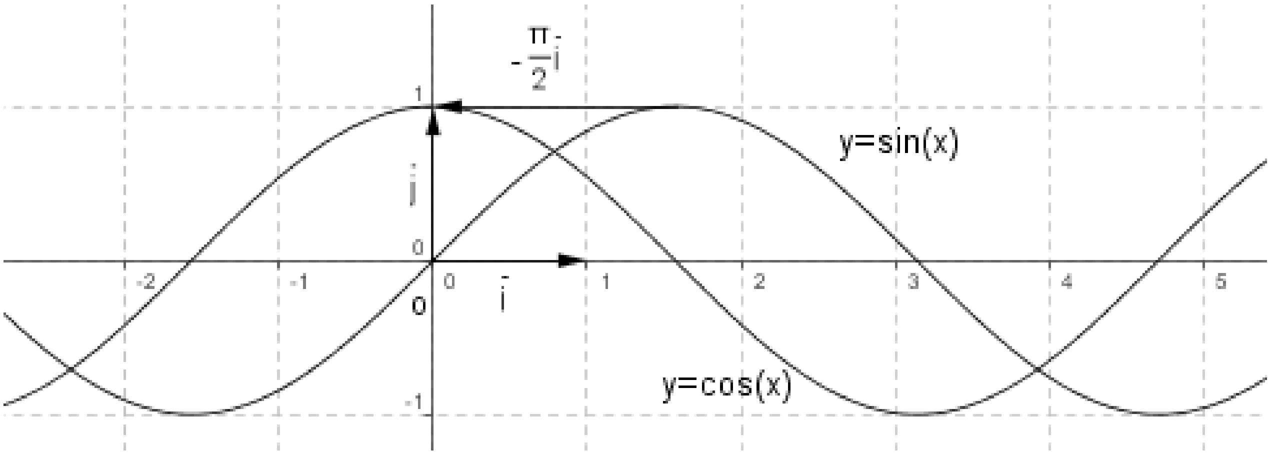
$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)>0$ donc $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

En utilisant les angles associés, on peut compléter ce tableau :

x	**0**	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$-\frac{\pi}{4}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

e) Représentation graphique des fonctions cosinus et sinus

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, les fonctions *cosinus* et *sinus* sont représentées par des sinusoïdales :



- La fonction *cosinus* étant paire, sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- La fonction *sinus* étant impaire, sa courbe est symétrique par rapport à l'origine.
- Comme pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\cos(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, la courbe de la fonction *cos* s'obtient à partir de celle de *sin* par une translation de vecteur $-\frac{\pi}{2}\vec{i}$.
- On retrouve graphiquement le fait que les deux fonctions ont pour période 2π .

Chapitre 4 – Dérivation

I – Nombre dérivé d'une fonction en un réel

Les problèmes de recherche de tangentes à une courbe amènent à s'intéresser au comportement du taux d'accroissement $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ *d'une fonction* f *entre* a *et* $a+h$ *lorsque* h *tend vers zéro, c'est-à-dire lorsque* h *prend des valeurs strictement positives ou strictement négatives de plus en plus proches de zéro.*

En physique par exemple, si $d(t)$ *est la position d'une voiture sur une route rectiligne à l'instant* t, $\frac{d(t+h)-d(t)}{h}$ *sera la vitesse* ***moyenne*** *du véhicule entre les instants* $t+h$ *et* t.
Lorsque h *va tendre vers zéro,* $\frac{d(t+h)-d(t)}{h}$ *va tendre vers la vitesse* ***instantanée*** *à l'instant* t.

<u>Définition :</u> Soit f une fonction définie sur D_f, où D_f est un intervalle ou une réunion d'intervalles, et soit a un réel appartenant à D_f.
On dit que la fonction f est dérivable en a s'il existe un réel, que l'on note $f'(a)$, tel que $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$. Ce réel $f'(a)$, *s'il existe*, est le *nombre dérivé de la fonction f en a*.

<u>Remarque :</u> Ce réel $f'(a)$ est parfois noté $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$. Cette notation est surtout utilisée en physique.

<u>Exemple :</u> Soit f *la fonction carré (définie sur* $\mathbb{R}$*). Cherchons si* f *est dérivable en* -3 *:*

Soit $h\neq 0$, *le taux d'accroissement de* f *entre* -3 *et* $-3+h$ *est :*
$$\frac{f(-3+h)-f(-3)}{h}=\frac{(-3+h)^2-(-3)^2}{h}=\frac{9-6h+h^2-9}{h}=\frac{h(6+h)}{h}=6+h.$$
Comme $\lim\limits_{h\to 0}6+h=6$, f *est dérivable en* -3 *et* $f'(-3)=6$.

II – Tangente à une courbe en un point

<u>Définition :</u> Soit C_f la courbe représentative d'une fonction f dans le plan muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$; soit a un réel appartenant à l'ensemble de définition D_f de la fonction f.
Si la fonction f est dérivable en a, alors la droite Δ qui passe par le point $A(a, f(a))$ et ayant pour coefficient directeur $f'(a)$ est la *tangente* à la courbe C_f au point A.

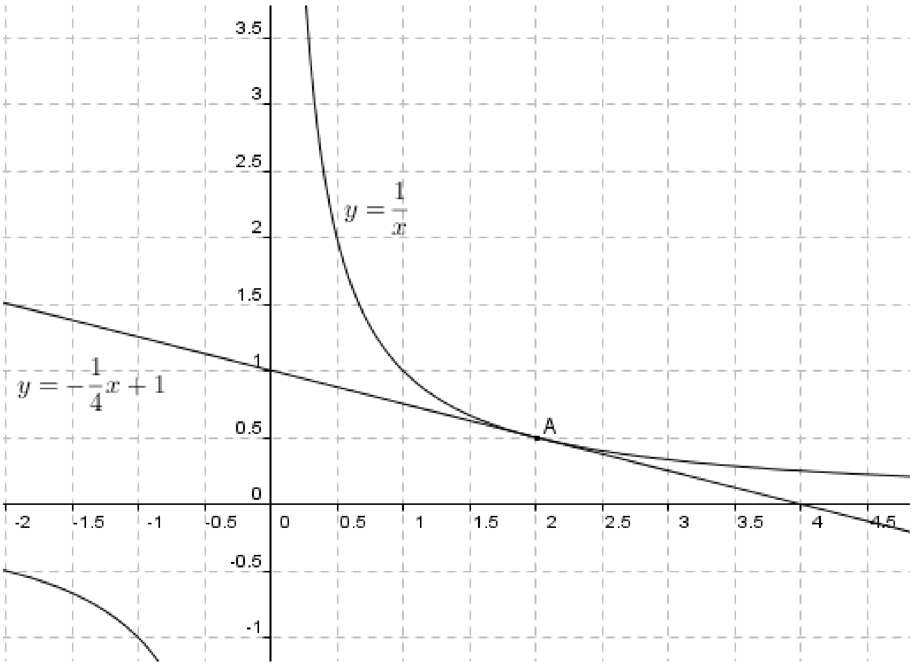
<u>Résultat immédiat :</u> Δ a pour équation $\boldsymbol{y=f'(a)(x-a)+f(a)}$.
En effet, l'équation de Δ est de la forme $y=f'(a)x+b$, puisque $f'(a)$ est son coefficient directeur. Comme $A(a, f(a))\in\Delta$, alors ses coordonnées vérifient l'équation :
$f(a)=f'(a)a+b$ donc $b=-f'(a)a+f(a)$, donc $y=f'(a)x-f'(a)a+f(a)$, soit
$\boldsymbol{y=f'(a)(x-a)+f(a)}$.

<u>Exemple :</u> Soit f définie sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{x}$. Cherchons l'équation de la tangente en A d'abscisse $x=2$ à C_f, si elle existe.

Déterminons si f est dérivable en 2 : soit h un réel tel que h est différent de 0 et – 2.
Le taux d'accroissement de f entre 2 et $2+h$ est :

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\frac{\frac{1}{2+h}-\frac{1}{2}}{h}=\frac{\frac{2}{2(2+h)}-\frac{2+h}{2(2+h)}}{h}=\frac{-\frac{h}{2(2+h)}}{h}=-\frac{h}{2h(2+h)}=-\frac{1}{2(2+h)}.$$

Comme $\lim\limits_{h\to0}2+h=2$, f est dérivable en 2 et $f'(2)=-\frac{1}{2\times2}=-\frac{1}{4}$, la tangente en $x=2$ à la courbe existe, son équation est $y=f'(2)(x-2)+f(2)$ soit
$y=-\frac{1}{4}(x-2)+\frac{1}{2}$, soit encore $\boldsymbol{y=-\frac{1}{4}x+1}$.



Si f est dérivable en a, $f'(a)(x-a)+f(a)$ est la meilleure approximation affine de $f(x)$ quand x est proche de a.

III – Fonction dérivée

<u>Définition :</u> Soit f une fonction définie sur D_f, où D_f est un intervalle ou une réunion d'intervalles. Si l'ensemble $D_{f'}$ des réels x tels que f soit dérivable en x est non vide, la *fonction dérivée* de f est la fonction f' qui a tout $x \in D_{f'}$ associe le nombre dérivé $f'(x)$.

<u>Exemples :</u>

- *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $h \neq 0$,*
  $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}=\dfrac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}=\dfrac{2xh+h^2}{h}=\dfrac{h(2x+h)}{h}=2x+h$.
  *Comme $\lim\limits_{h \to 0} 2x+h=2x$, **la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f'(x)=2x$**.*

- *Soit g la fonction définie sur $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{1}{x}$. Pour $x \neq 0$ et $h \neq 0$, $h \neq -x$,*
  $\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}=\dfrac{\dfrac{1}{x+h}-\dfrac{1}{x}}{h}=\dfrac{\dfrac{x}{x(x+h)}-\dfrac{x+h}{x(x+h)}}{h}=\dfrac{-\dfrac{h}{x(x+h)}}{h}=-\dfrac{h}{xh(x+h)}=-\dfrac{1}{x(x+h)}$.
  $\lim\limits_{h \to 0} -\dfrac{1}{x(x+h)}=-\dfrac{1}{x^2}$ *donc **g est dérivable sur $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$ par $g'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$**.*

<u>a) Dérivées des fonctions de référence</u>

On note D_f l'ensemble de définition de la fonction f et $D_{f'}$ celui de la fonction dérivée de f.

D_f	$f(x)=$	$D_{f'}$	$f'(x)=$
$\mathbb{R}$	k (constante)	$\mathbb{R}$	0
$\mathbb{R}$	x	$\mathbb{R}$	1
$\mathbb{R}$	x^2	$\mathbb{R}$	$2x$
$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$	$\dfrac{1}{x}$	$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$	$-\dfrac{1}{x^2}$
$\mathbb{R}$	x^n (avec $n \in \mathbb{N}^*$)	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$	$\dfrac{1}{x^n}$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$)	$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$
$[0;+\infty[$	$\sqrt{x}$	$]0;+\infty[$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

<u>Exemple :</u> La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^8$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f'(x)=8x^7$.

<u>b) Somme de deux fonctions dérivables et produit d'une fonction dérivable par une constante</u>

<u>Théorème (admis) :</u> Soient u et v deux fonctions dérivables sur un même *intervalle* I, et λ un réel. Alors :

- **La fonction $u+v$ est dérivable sur I et $(u+v)'(x)=u'(x)+v'(x)$.**
- **La fonction λu est dérivable sur I et $(\lambda u)'(x)=\lambda u'(x)$.**

<u>Exemples :</u>

- *f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2+x^3$.*
  f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et
  $f'(x)=2x+3x^{3-1}=2x+3x^2$.
- *f est définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=3x^3-\dfrac{1}{x}$.*
  f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme somme de deux fonctions dérivables sur $]0\,;+\infty[$ et
  $f'(x)=3\times 3x^2-\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=9x^2+\dfrac{1}{x^2}$.

<u>c) Produit de deux fonctions dérivables</u>

<u>Théorème :</u> Soient u et v deux fonctions dérivables sur un même *intervalle* I. Alors la fonction produit uv est dérivable sur I et $(uv)'(x)=u'(x)v(x)+v'(x)u(x)$.

<u>Exemple :</u> f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^3\times(4x-5)$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$:
$f(x)=u(x)v(x)$ avec $u(x)=2x^3$ et $v(x)=4x-5$. $u'(x)=2\times 3x^2=6x^2$ et $v'(x)=4$.
$f'(x)=u'(x)v(x)+v'(x)u(x)=6x^2(4x-5)+4\times 2x^3=6x^2(4x-5)+8x^3$.

<u>Preuve du théorème :</u> Soient $x\in I$ et $h\neq 0$ tels que $x+h\in I$.
On pose $t_1(h)=\dfrac{u(x+h)-u(x)}{h}$ et $t_2(h)=\dfrac{v(x+h)-v(x)}{h}$.
Par définition, $\lim\limits_{h\to 0} t_1(h)=u'(x)$ et $\lim\limits_{h\to 0} t_2(h)=v'(x)$ (1).
On remarque que $u(x+h)=u(x)+ht_1(h)$ et $v(x+h)=v(x)+ht_2(h)$. (2)
Calculons le taux d'accroissement de uv entre x et $x+h$:

$\dfrac{(uv)(x+h)-(uv)(x)}{h}=\dfrac{u(x+h)v(x+h)-u(x)v(x)}{h}$ avec (2) :

$$\frac{(uv)(x+h)-(uv)(x)}{h}=\frac{(u(x)+ht_1(h))\times(v(x)+ht_2(h))-u(x)v(x)}{h}$$

$$\frac{(uv)(x+h)-(uv)(x)}{h}=\frac{u(x)v(x)+u(x)ht_2(h)+ht_1(h)v(x)+h^2t_1(h)t_2(h)-u(x)v(x)}{h}$$

$\dfrac{(uv)(x+h)-(uv)(x)}{h}=\dfrac{h(u(x)t_2(h)+t_1(h)v(x)+ht_1(h)t_2(h))}{h}$. On simplifie par $h\neq 0$:

$\dfrac{(uv)(x+h)-(uv)(x)}{h}=u(x)t_2(h)+t_1(h)v(x)+ht_1(h)t_2(h)$.

D'après (1), $\lim\limits_{h\to 0} t_1(h)=u'(x)$ et $\lim\limits_{h\to 0} t_2(h)=v'(x)$ donc $\lim\limits_{h\to 0} ht_1(h)t_2(h)=0$ et

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(uv)(x+h)-(uv)(x)}{h}=u(x)v'(x)+u'(x)v(x)$.

<u>d) Inverse d'une fonction dérivable</u>

<u>Théorème :</u> Soit v une fonction dérivable sur un *intervalle* I, telle que v ne s'annule pas sur

I . Alors la fonction $\frac{1}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{v}\right)'(x)=-\frac{v'(x)}{[v(x)]^2}$.

<u>*Exemple :*</u> *f est définie sur $[10\,;+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{4x-3}$.*

f est dérivable sur $[10\,;+\infty[$ comme inverse d'une fonction dérivable sur $[10\,;+\infty[$.

$f(x)=\frac{1}{v(x)}$ *avec* $v(x)=4x-3$. $v'(x)=4$.

$f'(x)=-\frac{v'(x)}{[v(x)]^2}=-\frac{4}{(4x-3)^2}$.

<u>Preuve :</u> Soient $x\in I$ et $h\neq 0$ tels que $x+h\in I$. Le taux d'accroissement de $\frac{1}{v}$ entre x et $x+h$ est :

$$\frac{\frac{1}{v(x+h)}-\frac{1}{v(x)}}{h}=\frac{\frac{v(x)-v(x+h)}{v(x+h)\times v(x)}}{h}=-\frac{v(x+h)-v(x)}{h}\times\frac{1}{v(x+h)v(x)} .$$

Or $\lim\limits_{h\to 0}\frac{v(x+h)-v(x)}{h}=v'(x)$ car v est dérivable en x et $\lim\limits_{h\to 0}v(x+h)=v(x)$ donc on obtient le résultat souhaité.

<u>e) Quotient de deux fonctions dérivables</u>

<u>Théorème :</u> Soient u et v deux fonctions dérivables sur un même *intervalle* I , telle que v ne s'annule pas sur I . Alors la fonction quotient $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{u}{v}\right)'(x)=\frac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{[v(x)]^2}$.

<u>*Exemple :*</u> *f est définie sur $[10\,;+\infty[$ par $f(x)=\frac{x^2}{4x-3}$.*

f est dérivable sur $[10\,;+\infty[$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur $[10\,;+\infty[$.

$f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$ *avec* $u(x)=x^2$ *et* $v(x)=4x-3$. $u'(x)=2x$ *et* $v'(x)=4$.

$f'(x)=\frac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{[v(x)]^2}=\frac{2x(4x-3)-4\times x^2}{(4x-3)^2}=\frac{8x^2-6x-4x^2}{(4x-3)^2}=\frac{4x^2-6x}{(4x-3)^2}$.

Preuve du théorème : Sur I , v ne s'annule pas. Pour $x\in I$, $\dfrac{u(x)}{v(x)}=u(x)\times\dfrac{1}{v(x)}$.

Posons, pour $x\in I$, $V(x)=\dfrac{1}{v(x)}$.

V est dérivable sur I comme inverse d'une fonction dérivable sur I , on a donc $V'(x)=\dfrac{-v'(x)}{[v(x)]^2}$.

Comme $\left(\dfrac{u}{v}\right)(x)=u(x)V(x)$, $\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur I comme produit de fonctions dérivables sur I et on a $\left(\dfrac{u}{v}\right)'(x)=u'(x)V(x)+V'(x)u(x)=u'(x)\times\dfrac{1}{v(x)}-\dfrac{v'(x)}{v(x)^2}u(x)=\dfrac{u'(x)v(x)}{[v(x)]^2}-\dfrac{v'(x)u(x)}{[v(x)^2]}$.

Chapitre 5 – Dérivation et variations

I – Dérivée et sens de variation

<u>a) Dérivée d'une fonction monotone</u>

<u>Théorème :</u> Soit f une fonction monotone et dérivable sur un intervalle I .

- **Si f est une fonction croissante sur I , alors, pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$.**
- **Si f est une fonction décroissante sur I , alors, pour tout $x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$.**
- **Si f est constante sur I , alors, pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$.**

<u>Exemple :</u> La fonction carrée f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 2x$.

- *Elle est décroissante sur $]-\infty;0]$ et sur $]-\infty;0]$, $f'(x) = 2x \leqslant 0$.*
- *Elle est croissante sur $[0;+\infty[$ et sur $[0;+\infty[$, $f'(x) = 2x \geqslant 0$.*

<u>Preuve :</u>

- Soit f est une fonction dérivable et croissante sur un intervalle I . Soit a un réel quelconque de l'intervalle I . Pour tout réel non nul h tel que $a+h \in I$, on a :
  - Si $h > 0$ alors $a+h > a$ et donc $f(a+h) \geqslant f(a)$ puisque f est croissante sur I . Donc, $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \geqslant 0$ (quotient de deux nombres positifs).
  - Si $h < 0$ alors $a+h < a$ et donc $f(a+h) \leqslant f(a)$ puisque f est croissante sur I . Donc, $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \geqslant 0$ (quotient de deux nombres négatifs).

  Dans tous les cas, $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \geqslant 0$. Or, $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$ donc $f'(a) \geqslant 0$ (on admettra que la limite en 0 d'une expression positive est positive).
- Le cas où f est décroissante sur I est analogue.
- Si f est constante sur I , son taux d'accroissement est nul et donc, en passant à la limite, $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$.

<u>b) Sens de variation d'une fonction dérivable sur un intervalle</u>

<u>Théorème (admis) :</u> Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I contenu dans son ensemble de définition D_f .

- **Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$ (éventuellement, f' peut s'annuler en un nombre fini de valeurs) alors f est strictement croissante sur I .**
- **Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I$ (éventuellement, f' peut s'annuler en un nombre fini de valeurs) alors f est strictement décroissante sur I .**
- **Si pour tout $x \in I$ $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I .**

<u>Remarque :</u> Comme le dit le théorème, même si f est strictement monotone sur I , la fonction f' peut s'annuler sur I : par exemple, la fonction cube f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, est dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 3x^2$, et $f'(0) = 3 \times 0^2 = 0$.

Exemple : *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2+2x-1$. Étudions ses variations.*
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f'(x)=2x+2$.
On dresse le tableau de variations en utilisant le signe de la dérivée. Le signe de la dérivée est facile à obtenir ici : c'est une fonction affine, qui s'annule en $x=-1$ et qui est strictement croissante puisque son coefficient directeur est supérieur strictement à 0.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	-2	$\nearrow$	

On a en effet $f(-1)=(-1)^2+2\times(-1)-1=-2$.

II – Extrema locaux et dérivée

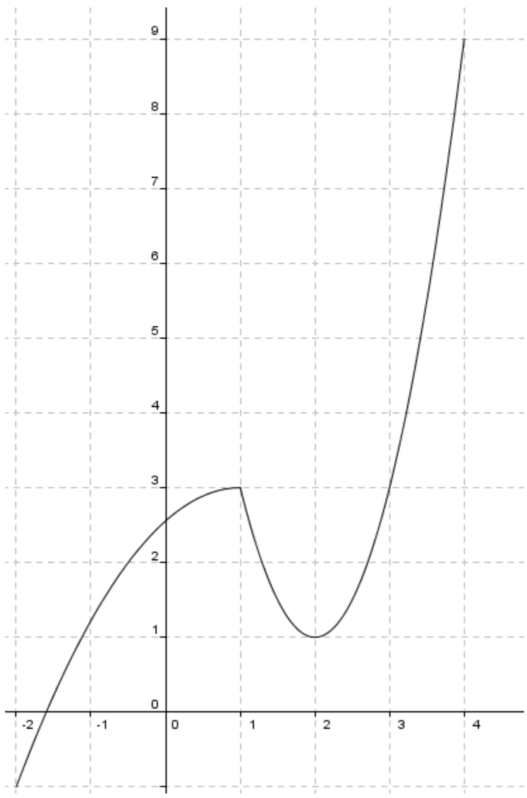
Un extremum désigne un maximum ou un minimum.

Définition : **f est une fonction définie sur un intervalle I et $x_0\in I$.**

- **Dire que $f(x_0)$ est un *maximum local* de f signifie que l'on peut trouver un intervalle *ouvert* J inclus dans I contenant x_0 tel que, pour tout $x\in J$, $f(x)\leqslant f(x_0)$.**
- **Dire que $f(x_0)$ est un *minimum local* de f signifie que l'on peut trouver un intervalle *ouvert* J inclus dans I contenant x_0 tel que, pour tout $x\in J$, $f(x)\geqslant f(x_0)$.**

Exemple : *f est définie sur $[-2;4]$.*

- *3 est un maximum local atteint en $x=1$ car par exemple, pour tout $x\in]0;2[$, $f(x)\leqslant f(1)$ et $f(1)=3$.*
- *1 est un minimum local atteint en $x=2$ car par exemple, pour tout $x\in]0;3[$, $f(x)\geqslant f(2)$ et $f(2)=1$.*
- *-1 est le maximum de f atteint en $x=-2$ car pour tout $x\in[-2;4]$, $f(x)\geqslant f(-2)$ et $f(-2)=-1$. Cependant, ce n'est pas un minimum local, car on ne peut pas trouver d'intervalle ouvert contenant – 2 sur lequel $f(x)\geqslant -1$.*



<u>Théorème :</u> f est une fonction dérivable sur un intervalle *ouvert* I et $x_0 \in I$. Si $f(x_0)$ est un extremum local, alors $f'(x_0)=0$.

<u>Remarque :</u> La réciproque est fausse ! Par exemple, la fonction cube est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée s'annule en $x=0$, mais il n'y a pas d'extremum local en $x=0$, puisque cette fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

<u>Théorème :</u> f est une fonction dérivable sur un intervalle *ouvert* I et $x_0 \in I$. Si f' s'annule en x_0 en changeant de signe, alors $f(x_0)$ est un extremum local.

<u>Exemple :</u> Dans l'exemple du I – b), f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2+2x-1$ admet un maximum local égal à – 2 en $x=-1$.

Chapitre 6 – Statistiques

I – Indicateurs statistiques

On s'intéresse à un caractère prenant différentes valeurs. On suppose que le caractère prend p valeurs différentes. Les différentes valeurs du caractère sont x_1, x_2, ..., x_p d'effectifs respectifs n_1, n_2, …, n_p.
n_i est donc l'effectif de la valeur x_i.

On peut donc résumer la série par un tableau statistique :

Valeur du caractère	x_1	x_2	...	x_p
Effectif	n_1	n_2	...	n_p

Effectif total : $N=n_1+n_2+...+n_p=\sum_{i=1}^{p} n_i$ Fréquence de la valeur x_i : $f_i=\frac{n_i}{N}$

a) Indicateurs de tendance centrale

Mode : C'est la valeur la plus fréquente.

Moyenne : $\overline{x}=\frac{n_1 x_1+n_2 x_2+...+n_p x_p}{N}=\frac{\sum_{i=1}^{p} n_i x_i}{N}$

Théorème : On a aussi $\overline{x}=f_1 x_1+f_2 x_2+...+f_p x_p=\sum_{i=1}^{p} f_i x_i$

Preuve : $\overline{x}=\frac{\sum_{i=1}^{p} n_i x_i}{N}=\sum_{i=1}^{p}\frac{n_i}{N}x_i$ or $f_i=\frac{n_i}{N}$ donc $\overline{x}=\sum_{i=1}^{p} f_i x_i$

Médiane : On suppose que les valeurs de la série d'effectif N sont rangées par ordre croissant (chacune d'elles étant répétée autant de fois que son effectif) : $x_1\leq x_2\leq ...\leq x_N$.

– Si N est impair, $Me=x_{\frac{N+1}{2}}$ (c'est le terme de rang $\frac{N+1}{2}$).
– Si N est pair, $Me=\frac{x_{\frac{N}{2}}+x_{\frac{N}{2}+1}}{2}$ (c'est la moyenne des termes de rang $\frac{N}{2}$ et $\frac{N}{2}+1$).

b) Indicateurs de position

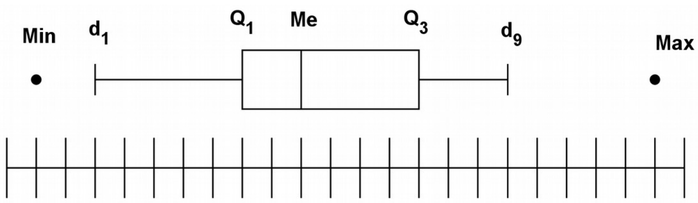
Les valeurs de la série d'effectif N sont rangées par ordre croissant (chacune d'elles étant répétée autant de fois que son effectif) : $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_N$.

Quartiles : Le premier quartile Q_1 de la série est la valeur x_i dont l'indice i est le plus petit entier supérieur ou égal à $\frac{N}{4}$. Le troisième quartile Q_3 de la série est la valeur x_i dont l'indice i est le plus petit entier supérieur ou égal à $\frac{3N}{4}$.

Déciles : Le premier décile d_1 de la série est la valeur x_i dont l'indice i est le plus petit entier supérieur ou égal à $\frac{N}{10}$. Le neuvième décile d_9 de la série est la valeur x_i dont l'indice i est le plus petit entier supérieur ou égal à $\frac{9N}{10}$.

c) Boîtes-à-moustaches

Pour résumer notre série statistique, on construit un diagramme en boîte.
- Les valeurs du caractère sont résumées sur un axe.
- On construit un rectangle (la boîte), parallèlement à l'axe, dont la longueur est l'intervalle interquartile.
- On place les moustaches au niveau des premier et neuvième déciles. On place la médiane.
- On symbolise les valeurs extrêmes par des points.



Si les déciles ne sont pas donnés, les extrémités des moustaches ne représentent plus les déciles mais le minimum et le maximum.

d) Indicateurs de dispersion

Variance : $V = \frac{n_1(x_1 - \overline{x})^2 + n_2(x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + n_p(x_p - \overline{x})^2}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i(x_i - \overline{x})^2}{N}$

Théorème : On a aussi $V = \frac{n_1 x_1^2 + n_2 x_2^2 + \ldots + n_p x_p^2}{N} - \overline{x}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2}{N} - \overline{x}^2$

Preuve : On commence par développer le carré en utilisant l'identité remarquable :

$$V=\frac{\sum_{i=1}^{p} n_i(x_i-\overline{x})^2}{N}=\frac{\sum_{i=1}^{p} n_i(x_i^2-2x_i\overline{x}+\overline{x}^2)}{N}=\frac{\sum_{i=1}^{p}(n_i x_i^2-2n_i x_i\overline{x}+n_i\overline{x}^2)}{N}$$; on sépare en 3 sommes :

$$V=\frac{\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2}{N}-2\overline{x}\frac{\sum_{i=1}^{p} n_i x_i}{N}+\overline{x}^2\frac{\sum_{i=1}^{p} n_i}{N}=\frac{\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2}{N}-2\overline{x}\,\overline{x}+\overline{x}^2\frac{N}{N}=\frac{\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2}{N}-2\overline{x}^2+\overline{x}^2=\frac{\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2}{N}-\overline{x}^2$$

Écart-type : $\sigma=\sqrt{V}$

Écart interquartile : $E_i=Q_3-Q_1$

Étendue : C'est la différence entre les valeurs extrêmes de la série : la plus grande moins la plus petite.

e) Résumer une série statistique

Résumer une série statistique, c'est indiquer la répartition des données en utilisant différents indicateurs, notamment un indicateur de tendance centrale et un indicateur de dispersion.

Paramètre de tendance centrale	**Paramètre de dispersion**	**Propriété**
Médiane : Me	Écart interquartile : E_i	Peu sensible aux valeurs extrêmes
Moyenne : $\overline{x}$	Écart-type : σ	Sensible aux valeurs extrêmes

II – Transformation affine des données

On suppose que l'on a une série statistique d'effectif N classée, $x_1\leq x_2\leq\ldots\leq x_N$.

a) Ajout d'un même nombre aux valeurs d'une série statistique

Propriétés : Lorsque l'on ajoute un nombre réel b à chacune des valeurs d'une série,
- **la moyenne est augmentée de b ,**
- **la médiane, chaque quartile et chaque décile sont augmentés de b ,**
- **la variance, l'écart-type et l'écart interquartile sont inchangés.**

Preuves :

– On a $\overline{x}=\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$ donc $\overline{y}=\frac{\sum_{i=1}^{N} y_i}{N}=\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i+b)}{N}=\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}+\frac{\sum_{i=1}^{N} b}{N}=\overline{x}+\frac{b\,N}{N}=\overline{x}+b$.

– On a $y_1\leq y_2\leq \ldots \leq y_N$ car la fonction $x\mapsto x+b$ est croissante.
Si x_j est la valeur du premier quartile de la série x , $y_j=x_j+b$ est celle du premier quartile de la série y . On raisonne de même pour les autres indicateurs de position.

– Calculons la variance V' de la série y en fonction de la variance V de la série x :
$$V'=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i-\overline{y})^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i+b-(\overline{x}+b))^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i+b-\overline{x}-b)^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\overline{x})^2=V .$$
L'écart-type σ est donc également inchangé. Le premier et le troisième quartile étant augmentés de b chacun, leur différence est inchangée.

b) Multiplication par un même nombre strictement positif des valeurs d'une série

Propriétés : Lorsque l'on multiplie par un nombre $a>0$ chacune des valeurs d'une série,
– **la moyenne est multipliée par a ,**
– **la médiane, chaque quartile et chaque décile sont multipliés par a ,**
– **la variance est multipliée par a^2 .**
– **l'écart-type et l'écart interquartile sont multipliés par a .**

Preuves :

– On a $\overline{x}=\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$ donc $\overline{y}=\frac{\sum_{i=1}^{N} y_i}{N}=\frac{\sum_{i=1}^{N} a\,x_i}{N}=a\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}=a\,\overline{x}$.

– On a $y_1\leq y_2\leq \ldots \leq y_N$ car la fonction $x\mapsto a\,x$ est strictement croissante lorsque $a>0$.
Si x_j est la valeur du premier quartile de la série x , $y_j=a\,x_j$ est celle du premier quartile de la série y . On raisonne de même pour les autres indicateurs de position.

– Calculons la variance V' de la série y en fonction de la variance V de la série x :
$$V'=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i-\overline{y})^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(a\,x_i-a\,\overline{y})^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[a(x_i-\overline{x})]^2=\frac{1}{N}a^2\sum_{i=1}^{N}(x_i-\overline{x})^2=a^2V .$$

– $\sigma'=\sqrt{V'}=\sqrt{a^2V}=a\sqrt{V}=a\,\sigma$ car $a>0$ et $Q_3'-Q_1'=a\,Q_3-a\,Q_1=a(Q_3-Q_1)$.

c) Résumé

Soient $a>0$ et $b\in\mathbb{R}$.

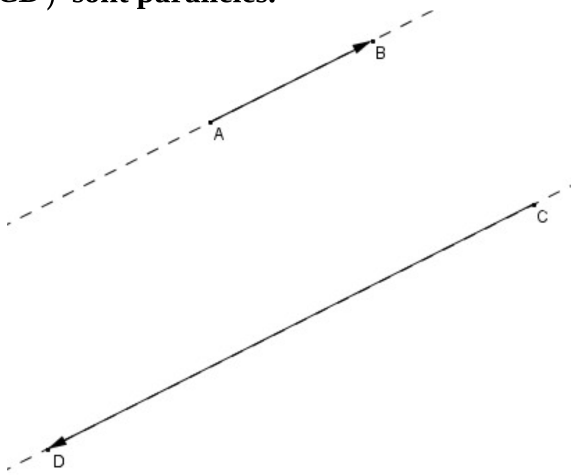
Valeurs	Moyenne	Variance	Écart-type	Quartiles		Écart interquartile
x_i	$\overline{x}$	V	σ	Q_1	Q_3	$E_i=Q_3-Q_1$
$a\,x_i+b$	$a\,\overline{x}+b$	a^2V	$a\,\sigma$	$a\,Q_1+b$	$a\,Q_3+b$	$a\,E_i=a(Q_3-Q_1)$

Chapitre 7 – Vecteurs et colinéarité

I – Vecteurs colinéaires

a) Définition et conséquences

Définition : Dire que que deux vecteurs non nuls $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont colinéaires équivaut à dire que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.



Théorème : On a montré en classe de seconde les équivalences suivantes :

Les droites (AB) et (CD) sont parallèles

$\Leftrightarrow$

$\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow$

Il existe un réel $k\neq 0$ tel que $\vec{AB}=k\vec{CD}$

Convention : En remplaçant k par 0 dans la dernière relation, on peut considérer que le vecteur nul $\vec{0}$ est colinéaire à tout vecteur.

Conséquence : Dire que 3 points A, B et C distincts deux-à-deux sont alignés équivaut à dire que il existe un réel $k\neq 0$ tel que $\vec{AB}=k\vec{AC}$.

b) Colinéarité et coordonnées

Théorème : Dans un repère, les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont colinéaires seulement si $xy'-x'y=0$.

Preuve :

- Supposons que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

- Si $\vec{u}=\vec{0}$, alors $x=y=0$ donc $x\,y'-y\,x'=0\,y'-0\,x=0$.
- Sinon, il existe donc un réel k tel que $\vec{v}=k\,\vec{u}$, on en déduit donc que $\begin{cases} x'=k\,x \\ y'=k\,y \end{cases}$.

On a donc $x\,y'-y\,x'=x\,k\,y-y\,k\,x=0$.

- Supposons que $xy'-x'\,y=0$.
  - Si $\vec{u}=\vec{0}$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
  - Si $\vec{u}\neq 0$, alors l'une de ses coordonnées, par exemple x , est non nulle.

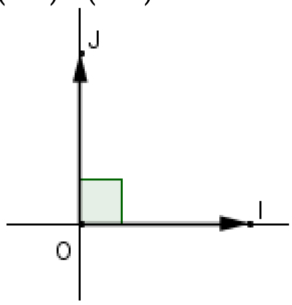
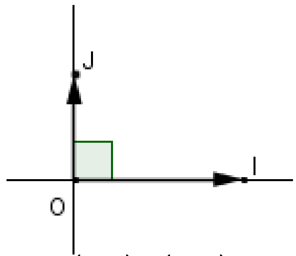
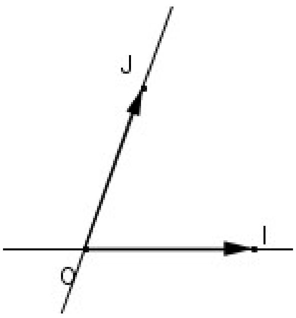
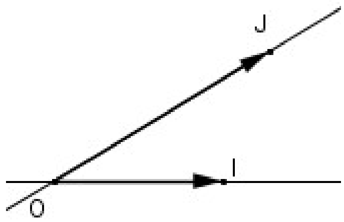
    On a donc $x\,y'=x'\,y$ soit $y'=\frac{x'}{x}\,y$.

    Posons $k=\frac{x'}{x}$. Il en résulte que $x'=k\,x$ et $y'=k\,y$, donc $\vec{u}=k\,\vec{v}$.

    Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires (si $y\neq 0$, on procède de même avec $k=\frac{y'}{y}$).

II – Décomposition d'un vecteur

a) Les repères

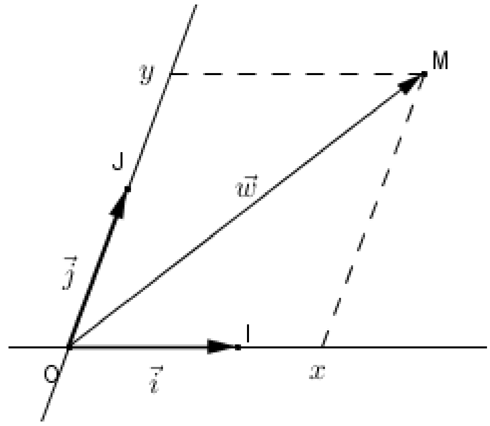
Repère orthonormé (ou orthonormal) $(OI)\perp(OJ)$ **et** $OI=OJ$ 	**Repère orthogonal**  $(OI)\perp(OJ)$
Repère normé (ou normal) $OI=OJ$ 	**Repère quelconque** 

En notant $\vec{i}=\vec{OI}$ et $\vec{j}=\vec{OJ}$, le repère $(O\,;I\,,J)$ se note $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.
Choisir un repère, c'est :

- choisir l'origine du repère O,
- choisir un couple de vecteurs non colinéaires $(\vec{i}\,,\vec{j})$.

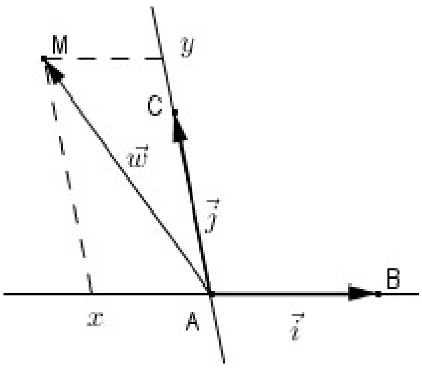
<u>Théorèmes :</u>

- **Dire qu'un point M a pour coordonnées $(x;y)$ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ signifie que $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$.**
- **Dire que le vecteur $\vec{w}$ a pour coordonnées $(x;y)$ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ signifie que $\vec{w}=x\vec{i}+y\vec{j}$ (puisque par définition, les coordonnées de $\vec{w}$ sont celle du point M tel que $\overrightarrow{OM}=\vec{w}$).**



<u>b) Expression d'un vecteur en fonction de deux vecteurs non colinéaires</u>

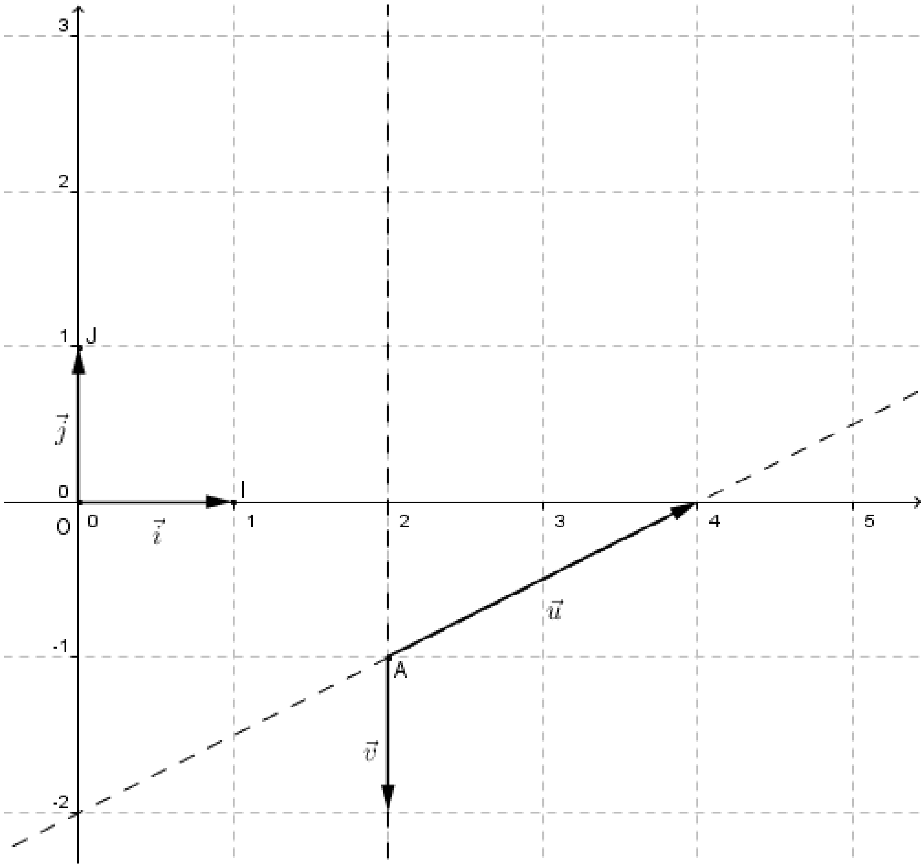
<u>Théorème (admis) :</u> A, B et C sont trois points non alignés du plan. Alors, pour tout point M du plan, il existe un *unique* couple de réels $(x;y)$ tels que $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$.
Ce couple est le couple de coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM}$ (et du point M) dans le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.



<u>Théorème (admis) :</u> $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs *non colinéaires*. Pour tout vecteur $\vec{w}$, il existe un *unique* couple de réels $(x;y)$ tels que $\vec{w}=x\vec{u}+y\vec{v}$.

<u>Exemple :</u> On considère un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$, et les points $I(1;0)$, $J(0;1)$, $A(2;-1)$. Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$.

Déterminons les coordonnées de O, $\vec{i}$ et $\vec{j}$ dans le repère $(A;\vec{u},\vec{v})$.



On peut dans un cas comme celui-ci lire les coordonnées sur le graphique, ou alors utiliser la méthode suivante.

On commence par exprimer $\vec{i}$ *et* $\vec{j}$ *en fonction de* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$. *Par définition,*

$\begin{cases} \vec{u}=2\vec{i}+\vec{j} \\ \vec{v}=-\vec{j} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\vec{i}=\vec{u}-\vec{j} \\ \vec{j}=-\vec{v} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{i}=\dfrac{1}{2}\vec{u}+\dfrac{1}{2}\vec{v} \\ \vec{j}=-\vec{v} \end{cases}$. *On en déduit que dans* $(A;\vec{u},\vec{v})$, *on a* $\vec{i}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$ *et* $\vec{j}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

On a $\overrightarrow{AO}=-\overrightarrow{OA}$ *donc par définition* $\overrightarrow{AO}=-2\vec{i}+\vec{j}$, *donc*
$\overrightarrow{AO}=-2\left(\dfrac{1}{2}\vec{u}+\dfrac{1}{2}\vec{v}\right)-\vec{v}=-\vec{u}-\vec{v}-\vec{v}=-\vec{u}-2\vec{v}$. O *a pour coordonnées* $(-1;-2)$ *dans* $(A;\vec{u},\vec{v})$.

III – Équation cartésienne d'une droite

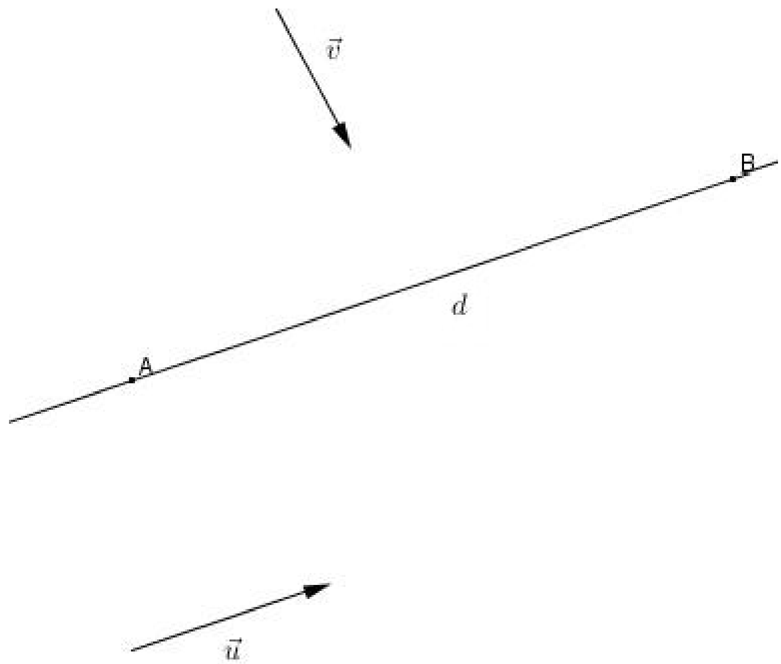
<u>a) Vecteur directeur d'une droite</u>

<u>Définition :</u> Un vecteur *directeur* d'une droite d est un vecteur $\vec{u}$ non nul qui a la même direction que la droite d .

On en déduit que :

- Si A et B appartiennent à d de vecteur directeur $\vec{u}$, alors $\vec{AB}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires. Si $A \neq B$, $\vec{AB}$ est un vecteur directeur de d , ainsi que tout multiple de $\vec{AB}$ ou de $\vec{u}$.
- Un point A et un vecteur $\vec{u} \neq \vec{0}$ définissent une droite d unique.

<u>Exemple :</u> $\vec{u}$ (et tout vecteur $k\vec{u}$ avec $k \neq 0$) est directeur de d , ainsi que $\vec{AB}$. $\vec{v}$ n'est pas directeur de d .



<u>b) Équation cartésienne d'une droite</u>

<u>Théorème :</u> Dans un repère, toute droite d a une équation *cartésienne* de la forme $ax + by + c = 0$ avec $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d .

**<u>Théorème réciproque :</u> a , b et c sont trois nombres tels que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.
L'ensemble des points $M(x;y)$ dont les coordonnées vérifient l'équation $ax + by + c = 0$ est une droite.**

<u>Preuve du théorème :</u> Soit $A(x_A;y_A)$ un point appartenant à d et $\vec{u}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ un vecteur directeur de d. Comme $\vec{u}\neq\vec{0}$, on a $p\neq0$ ou $q\neq0$. Soit $M(x;y)$ un point du plan.

$\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x-x_A \\ y-y_A \end{pmatrix}$.

$M\in d\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow(x-x_A)q-p(y-y_A)=0\Leftrightarrow xq-x_Aq-py+py_A=0\Leftrightarrow$ $qx-py-qx_A+py_A=0$.

En posant $a=q$, $b=-p$ et $c=-qx_A+py_A$, on a $ax+by+c=0$ avec $a\neq0$ ou $b\neq0$, et $\vec{u}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ – c'est-à-dire $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ – est directeur de d.

<u>Preuve de la réciproque du théorème :</u> Cherchons l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $ax+by+c=0$ avec $a\neq0$ ou $b\neq0$.

- Si $b\neq0$, $ax+by+c=0\Leftrightarrow\frac{a}{b}x+\frac{b}{b}y+\frac{c}{b}=0\Leftrightarrow y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$.

  L'ensemble est la droite d'équation $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$.

- Si $b=0$, alors $a\neq0$. $ax+c=0\Leftrightarrow ax=-c\Leftrightarrow x=-\frac{c}{a}$.

  L'ensemble cherché est la droite d'équation $x=-\frac{c}{a}$.

<u>Remarque :</u> Toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées a pour équation $y=mx+p$. Une équation cartésienne est $mx-y+p=0$. Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite.

On a donc montré que m est le coefficient directeur de $d\Leftrightarrow\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ est directeur de d.

<u>Exemple :</u> Déterminons une équation de la droite (AB) avec $A(-2;3)$ et $B(4;5)$.

Soit $M(x;y)$. $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x+2 \\ y-3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$M\in(AB)\Leftrightarrow(x+2)2-6(y-3)=0\Leftrightarrow2x+4-6y+18=0\Leftrightarrow2x-6y+22=0\Leftrightarrow x-3y+11=0$.

Une équation cartésienne de (AB) est $x-3y+11=0$.

Chapitre 8 – Produit scalaire dans le plan

I – Définition et expression du produit scalaire

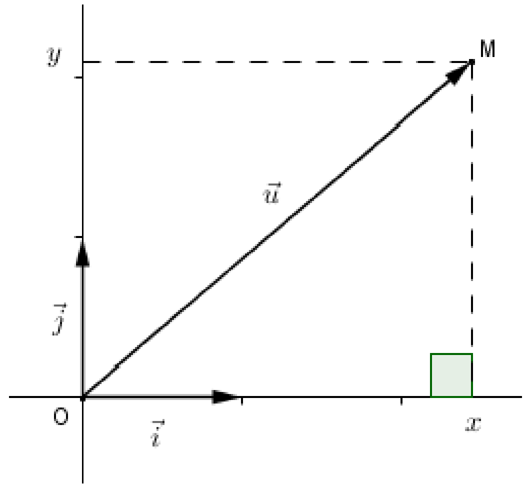
a) Norme d'un vecteur

Définition : Soit $\vec{u}$ un vecteur, et $\overrightarrow{AB}$ un représentant du vecteur $\vec{u}$.
On note $\|\vec{u}\|$ la norme du vecteur $\vec{u}$. Comme $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, on a $\|\vec{u}\|=AB$.
Si $\|\vec{u}\|=1$, on dit que $\vec{u}$ est *unitaire*.

Propriétés :

- $\|\overrightarrow{AB}\|=0 \Leftrightarrow AB=0 \Leftrightarrow A=B$.
- Pour tout $k\in\mathbb{R}$ et pour tout vecteur $\vec{u}$, on a $\|k\vec{u}\|=|k|\times\|\vec{u}\|$. Par exemple, $\|-3\vec{u}\|=3\|\vec{u}\|$ et $\|\sqrt{2}\vec{u}\|=\sqrt{2}\|\vec{u}\|$.
- Dans un repère *orthonormal* $(O;\vec{i},\vec{j})$ où $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont *unitaires*, si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, on a $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$.

Preuve de la dernière propriété : Si M est le point tel que $\overrightarrow{OM}=\vec{u}$, alors $M(x;y)$, d'où $\|\vec{u}\|=OM=\sqrt{x^2+y^2}$.



b) Définition du produit scalaire avec la norme

Définition : On note $\vec{u}\cdot\vec{v}$ le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Ce produit se lit « $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ ». On a $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)$.
Le produit scalaire est donc un nombre réel.

Remarque : Si $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$, alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

Preuve : Si $\vec{u}=\vec{0}$, $\vec{0}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{0}+\vec{v}\|^2-\|\vec{0}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)=\frac{1}{2}\left(\|\vec{v}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)=0$. La preuve avec $\vec{v}=\vec{0}$ est analogue.

Remarque : La réciproque est fausse ; par exemple, si ABC est un triangle rectangle en B, d'après le théorème de Pythagore, $AC^2-AB^2-BC^2=0$. On a alors :

$\vec{AB}\cdot\vec{BC}=\frac{1}{2}(\|\vec{AB}+\vec{BC}\|^2-\|\vec{AB}\|^2-\|\vec{BC}\|^2)=\frac{1}{2}(\|\vec{AC}\|^2-\|\vec{AB}\|^2-\|\vec{BC}\|^2)=\frac{1}{2}(AC^2-AB^2-BC^2)=0$,

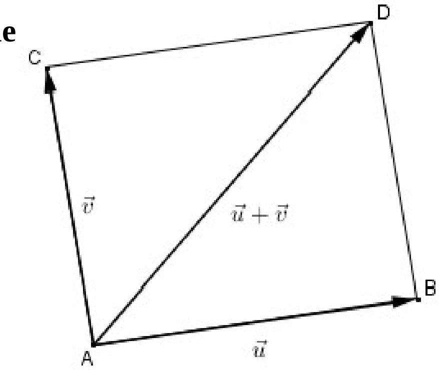
alors que $\vec{AB}\neq\vec{0}$ et $\vec{BC}\neq\vec{0}$.

Carré scalaire : Le produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{u}$ est appelé carré scalaire de $\vec{u}$ et se note $\vec{u}^2$.
On a $\vec{u}^2=\|\vec{u}\|^2$.

Preuve :

$\vec{u}^2=\vec{u}\cdot\vec{u}=\frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{u}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{u}\|^2)=\frac{1}{2}(\|2\vec{u}\|^2-2\|\vec{u}\|^2)=\frac{1}{2}(4\|\vec{u}\|^2-2\|\vec{u}\|^2)=\frac{1}{2}\times2\|\vec{u}\|^2=\|\vec{u}\|^2$.

Interprétation géométrique : Soit $ABDC$ un parallélogramme tel que $\vec{AB}=\vec{u}$ et $\vec{AC}=\vec{v}$. On a donc $\vec{u}+\vec{v}=\vec{AD}$ et $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(AD^2-AB^2-AC^2\right)$.



c) Expression analytique du produit scalaire

Théorème : Dans un repère *orthonormal* où les vecteurs du repère sont *unitaires*, si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'$.

Preuve : On a $\|\vec{u}\|^2=x^2+y^2$ et $\|\vec{v}\|^2=x'^2+y'^2$. Comme $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$, on a également

$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=(x+x')^2+(y+y')^2=x^2+2xx'+x'^2+y^2+2yy'+y'^2$. Par définition,

$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(x^2+2xx'+x'^2+y^2+2yy'+y'^2-x^2-y^2-x'^2-y'^2\right)=\frac{1}{2}\left(2xx'+2yy'\right)=xx'+yy'$

Exemple : Si $\vec{u}\begin{pmatrix}-5\\6\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=-5\times2+6\times1=-4$.

Propriétés algébriques : Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, et tous réels a et b, en utilisant l'expression analytique, on peut montrer que :

- $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$
- $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$
- $(a\vec{u})\cdot(b\vec{v})=(ab)\vec{u}\cdot\vec{v}$

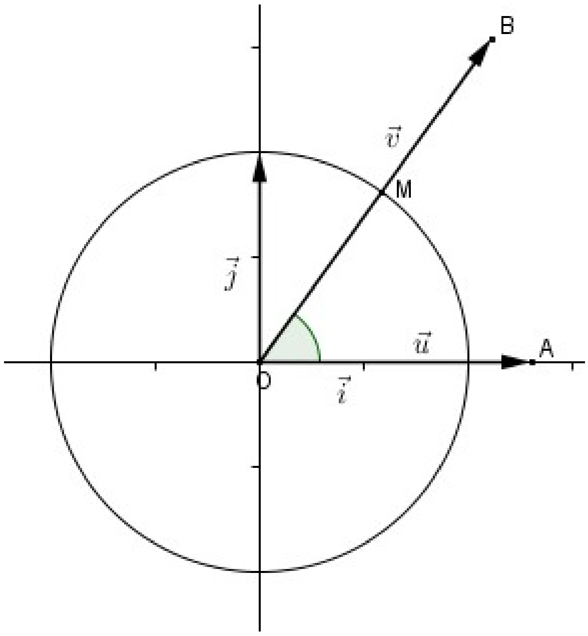
Conséquences : On en déduit par exemple :

- $(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$
- $(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$
- $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{v}^2$

d) Expression du produit scalaire en fonction de la norme et de l'angle

Propriété : Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},\vec{v})$.

Preuve : On pose $\vec{OA}=\vec{u}$ et $\vec{OB}=\vec{v}$. On choisit un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j})$ tel que $\vec{i}$ et $\vec{OA}$ aient le même sens et $\vec{i}$ et $\vec{j}$ soient unitaires.
Soit M l'intersection entre $[OB)$ et le cercle trigonométrique de centre O.



Dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, on a $\vec{OA}\begin{pmatrix} OA \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{OB}\begin{pmatrix} OB\cos(\vec{u},\vec{v}) \\ OB\sin(\vec{u},\vec{v}) \end{pmatrix}$.
On calcule $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{OA}\cdot\vec{OB}$ avec l'expression analytique :
$\vec{u}\cdot\vec{v}=OA\times OB\cos(\vec{u},\vec{v})+0\times OB\sin(\vec{u},\vec{v})$ donc $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},\vec{v})$.

Remarque : Si θ est une mesure de l'angle géométrique $(\vec{u},\vec{v})$, alors $\cos(\vec{u},\vec{v})=\cos(\theta)$ donc $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\theta)$.

Conséquence :

- **Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls *de même sens*, on a $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$.**
- **Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls *de sens contraires*, on a $\vec{u}\cdot\vec{v}=-\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$.**

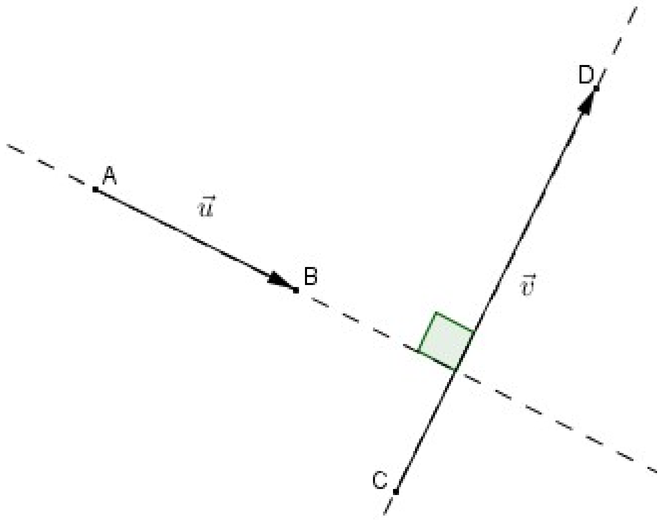
Preuve :

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls de même sens, $\cos(\vec{u},\vec{v})=\cos(0)=1$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls de sens contraires, $\cos(\vec{u},\vec{v})=\cos(\pi)=-1$.

II – Produit scalaire et orthogonalité

<u>a) Orthogonalité</u>

<u>Définition :</u> Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.
Dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux signifie que si $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{CD}$, alors (AB) et (CD) sont perpendiculaires.
Par convention, le vecteur nul $\vec{0}$ est orthogonal à tout vecteur.



<u>Théorème :</u> $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux équivaut à $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$. On en déduit que (AB) et (CD) sont perpendiculaires si et seulement si $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$.

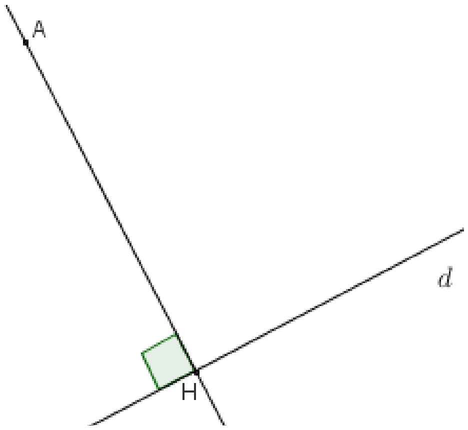
<u>Preuve :</u>

- Si $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$, alors par définition $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux et on a aussi $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.
- Si $\vec{u}\neq\vec{0}$ et $\vec{v}\neq\vec{0}$, $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},\vec{v})$.
  Comme $\|\vec{u}\|\neq 0$ et $\|\vec{v}\|\neq 0$, alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=0\Leftrightarrow\cos(\vec{u},\vec{v})=0$.
  $\cos(\vec{u},\vec{v})=0\Leftrightarrow(\vec{u},\vec{v})=\frac{\pi}{2}+k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

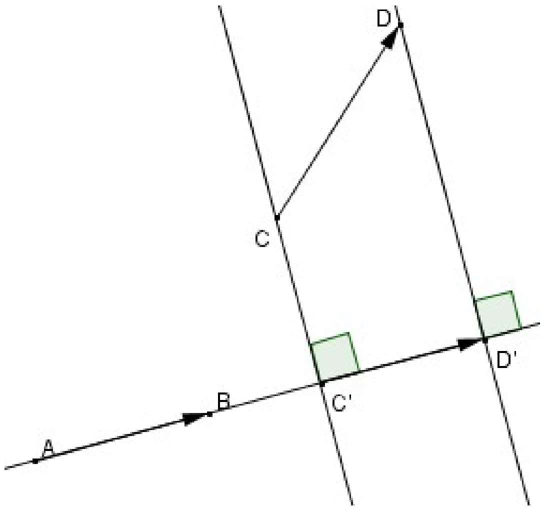
<u>Conséquence :</u> Dans un repère orthonormal, si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow xx'+yy'=0$.

b) Projection orthogonale

Rappel : Soient d une droite et A un point. On appelle projeté orthogonal de A sur d l'intersection H de d avec la perpendiculaire à d passant par A .



Théorème : Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ deux vecteurs non nuls.
Soient C' et D' les projetés orthogonaux de C et D sur la droite (AB) .
Alors $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{C'D'}$.



Remarques :

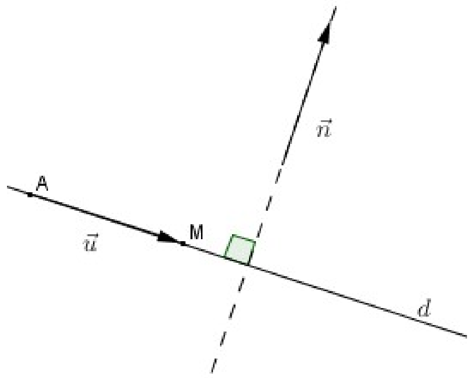
- Comme $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{C'D'}$ sont colinéaires, leur produit scalaire est en général plus facile à calculer.
- Ce théorème fonctionne aussi en projetant A et B sur (CD) : si on appelle A' et B' leurs projetés, alors $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{A'B'}\cdot\overrightarrow{CD}$.

Preuve : En utilisant Chasles, on a :
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{C'D'}+\overrightarrow{D'D}\right)=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{C'D'}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{D'D}$ or comme $\overrightarrow{AB}$ est orthogonal à $\overrightarrow{CC'}$ et à $\overrightarrow{D'D}$, alors $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CC'}=0$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{D'D}=0$. On a donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{C'D'}$.

III – Droite et produit scalaire

a) Vecteur normal à une droite

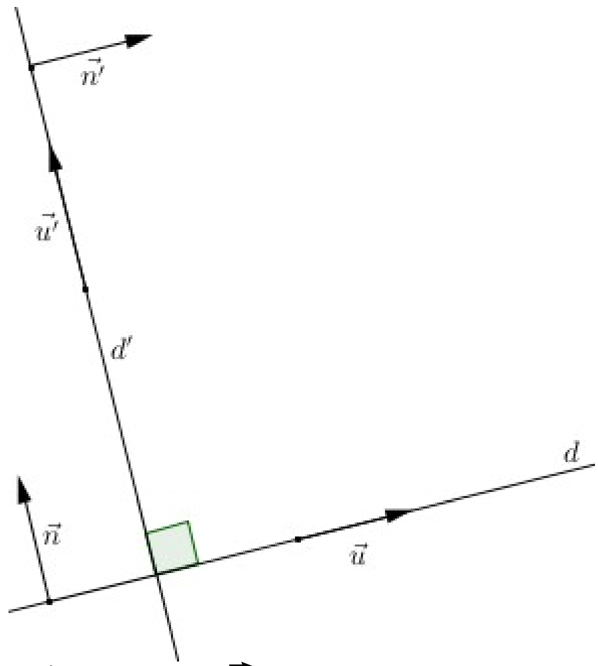
Définition : **On dit qu'un vecteur *non nul* $\vec{n}$ est un vecteur normal à la droite d si et seulement si $\vec{n}$ est orthogonal à tout vecteur directeur de d. Ainsi, si $\overrightarrow{AM}$ est directeur de d, $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal à $\vec{n}$.**



Théorème : **M appartient à la droite d passant par $A \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.**

Conséquences : Soient d une droite ayant pour vecteur directeur $\vec{u}$ et pour vecteur normal $\vec{n}$ et d' une droite ayant pour vecteur directeur $\vec{u'}$ et pour vecteur normal $\vec{n'}$.
Alors, si d et d' sont perpendiculaires :

- $\vec{n}$ est directeur de d' et $\vec{n'}$ est directeur de d.
- $\vec{u}$ est normal à d' et $\vec{u'}$ est normal à d.



$d \perp d' \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{n'} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{u'} = 0 \Leftrightarrow \vec{n}$ et $\vec{u'}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \vec{n'}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires

b) Vecteur normal et équation de droite

Théorème : On considère un repère orthonormal.

- **Soit d une droite d'équation $ax+by+c=0$ avec $a\neq 0$ ou $b\neq 0$. Alors le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est normal à d.**
- **Réciproquement, si un vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ *non nul* est normal à une droite d, alors d a une équation de la forme $ax+by+c=0$, avec $c\in\mathbb{R}$.**

Preuve :

- Supposons que d ait pour équation $ax+by+c=0$ avec $a\neq 0$ ou $b\neq 0$. Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est directeur de d. Soit $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$; on a $\vec{u}\cdot\vec{n}=-b\times a+a\times b=0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{n}$ étant orthogonaux, $\vec{n}$ est normal à d.
- Réciproquement, supposons que $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ non nul soit normal à d. Soit $A(x_A\,;y_A)$ un point de d. $M(x\,;y)\in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0 \Leftrightarrow (x-x_A)a+(y-y_A)b=0 \Leftrightarrow ax+by-ax_A-by_A=0$.
  En posant $c=-ax_A-by_A$, on a le résultat voulu.

Exemple : Soit $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ un vecteur. Déterminons une équation de la droite d passant par $A(5\,;-3)$ et ayant $\vec{n}$ comme vecteur normal.

Soit $M(x\,;y)$; alors $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-5 \\ y+3 \end{pmatrix}$.

$M\in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0 \Leftrightarrow (x-5)\times 2+(y+3)\times 7=0 \Leftrightarrow 2x-10+7y+21=0 \Leftrightarrow 2x+7y+11=0$.

$2x+7y+11=0$ est une équation de d.

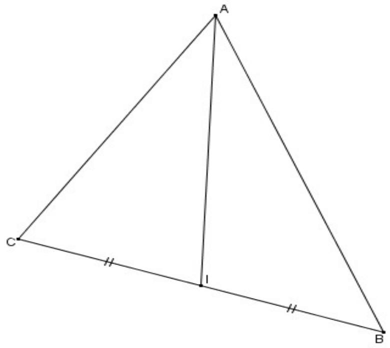
Conséquences :

- d et d' étant deux droites d'équations $ax+by+c=0$ et $a'x+b'y+c'=0$, elles sont perpendiculaires si et seulement si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux, donc si et seulement si $aa'+bb'=0$.
- En utilisant des vecteurs normaux, on peut montrer que deux droites d et d' d'équations réduites $y=mx+p$ et $y=m'x+p'$ sont perpendiculaires si et seulement si $mm'=-1$.

IV – Applications du produit scalaire

a) Relations métriques dans le triangle

<u>Théorème de la médiane :</u> Soit ABC un triangle, et I le milieu de $[BC]$. Alors on a $\boldsymbol{AB^2+AC^2=2AI^2+\frac{BC^2}{2}}$.



<u>Démonstration :</u> $AB^2+AC^2=\vec{AB}^2+\vec{AC}^2=(\vec{AI}+\vec{IB})^2+(\vec{AI}+\vec{IC})^2$

$AB^2+BC^2=\vec{AI}^2+\vec{IB}^2+2\vec{AI}\cdot\vec{IB}+\vec{AI}^2+\vec{IC}^2+2\vec{AI}\cdot\vec{IC}$

$AB^2+AC^2=2AI+IB^2+IC^2+2\vec{AI}\cdot\underbrace{(\vec{IB}+\vec{IC})}_{\vec{0}}$

$AB^2+AC^2=2AI^2+IB^2+IC^2=2AI^2+\left(\frac{BC}{2}\right)^2+\left(\frac{BC}{2}\right)^2$

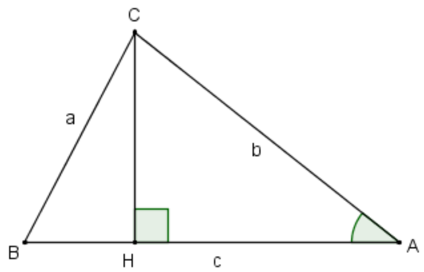
D'où $AB^2+AC^2=2AI^2+\frac{BC^2}{4}+\frac{BC^2}{4}=2AI^2+\frac{BC^2}{2}$.

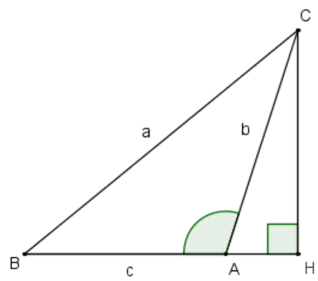
<u>Conséquence :</u> Si ABC est rectangle en A on a $AI=\frac{BC}{2}$, donc dans ce cas particulier,

$AB^2+AC^2=2\left(\frac{BC}{2}\right)^2+\frac{BC^2}{2}=\frac{2BC^2}{4}+\frac{BC^2}{2}=BC^2$: on retrouve le théorème de Pythagore !

<u>Théorème :</u> Soit ABC un triangle d'aire S. On note $b=AC$ et $c=AB$.
Alors on a $\boldsymbol{S=\frac{1}{2}bc\sin(\hat{A})}$.

<u>Démonstration :</u> Soit H le pied de la hauteur issue de C. On sait que $S=\frac{1}{2}AB\times CH$.





Lorsque $\hat{A}$ est aigu, $CH=CA\times\sin(\hat{A})$.

Lorsque $\hat{A}$ est obtus, $CH=CA\times\sin(\pi-\hat{A})=CA\times\sin(\hat{A})$.

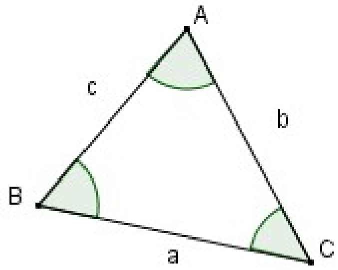
Dans tous les cas, $S=\frac{1}{2}AB\times AC\sin(\hat{A})$.

<u>Conséquence :</u> D'après ce théorème, on a $2S=bc\sin(\hat{A})=ac\sin(\hat{B})=ab\sin(\hat{B})$. En multipliant cette relation par $\frac{1}{abc}$, on obtient $\frac{\sin(\hat{A})}{a}=\frac{\sin(\hat{B})}{b}=\frac{\sin(\hat{C})}{c}$. Or, comme les sinus des angles d'un triangle sont non nuls, en inversant on a : $\boldsymbol{\frac{a}{\sin(\hat{A})}=\frac{b}{\sin(\hat{B})}=\frac{c}{\sin(\hat{C})}}$.

b) Relation d'Al-Kashi

<u>Théorème :</u> Soit ABC un triangle. On note $a=BC$, $b=AC$ et $c=AB$.

Alors on a $a^2=b^2+c^2-2bc\cos(\hat{A})$.



<u>Démonstration :</u> $BC^2=\vec{BC}^2=(\vec{BA}+\vec{AC})^2=\vec{BA}^2+2\vec{BA}\cdot\vec{AC}+\vec{AC}^2=BA^2+AC^2+2(-\vec{AB})\cdot\vec{AC}$ donc $BC^2=AB^2+AC^2-2\vec{AB}\cdot\vec{AC}=AB^2+AC^2-2AB\times AC\times\cos(\hat{A})$.

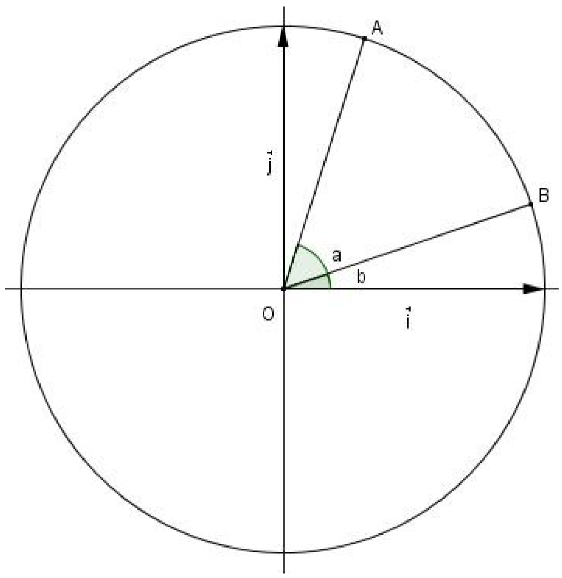
<u>Conséquence :</u> Si ABC est rectangle en A, on retrouve le théorème de Pythagore, puisque $\cos(\hat{A})=0$.

c) Trigonométrie

<u>Théorème (formules d'addition) :</u> Pour tous réels a et b, on a :

- $\boldsymbol{\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)}$
- $\boldsymbol{\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)}$
- $\boldsymbol{\sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\sin(b)\cos(a)}$
- $\boldsymbol{\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)}$

<u>Démonstration :</u> On considère les points A et B du cercle trigonométrique correspondant aux réels a et b après enroulement de la droite des réels.
En utilisant l'expression du produit scalaire en fonction de l'angle, on obtient :
$\vec{OB}\cdot\vec{OA}=OB\times OA\times\cos(\vec{OB},\vec{OA})=\cos(a-b)$.
En utilisant l'expression analytique du produit scalaire, comme on a $\vec{OB}\begin{pmatrix}\cos(b)\\ \sin(b)\end{pmatrix}$ et $\vec{OA}\begin{pmatrix}\cos(a)\\ \sin(a)\end{pmatrix}$,
alors $\vec{OB}\cdot\vec{OA}=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$.
On a établi la première relation.
En remplaçant b par $-b$ dans la première relation, on obtient la deuxième.
Pour obtenir la troisième relation, on remarque que



$\sin(a-b)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(a-b)\right)=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-a\right)+b\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\cos(b)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\sin(b)$ donc $\sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b)$.
En remplaçant b par $-b$ dans la troisième relation, on obtient la quatrième.

<u>Conséquence (formules de duplication) :</u> Pour tout réel a , on a :

- $\boldsymbol{\cos(2a)=\cos^2(a)-\sin^2(a)}$
- $\boldsymbol{\cos(2a)=2\cos^2(a)-1}$
- $\boldsymbol{\cos(2a)=1-2\sin^2(a)}$
- $\boldsymbol{\sin(2a)=2\sin(a)\cos(a)}$

<u>Preuve :</u> il suffit de prendre $b=a$ dans la deuxième et la quatrième relation, et d'utiliser le fait que $\cos^2(a)+\sin^2(a)=1$.

d) Équations de cercle

<u>Théorème :</u> Le cercle de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$.

<u>Démonstration :</u> Le point M appartient au cercle si et seulement si AMB est rectangle en M , c'est-à-dire si et seulement si $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$.

<u>Théorème :</u> Dans un repère orthonormé, le cercle de centre $A(x_A;y_A)$ et de rayon R a pour équation : $(x-x_A)^2+(y-y_A)^2=R^2$.

<u>Démonstration :</u> Un point $M(x;y)$ appartient au cercle si et seulement si $AM^2=R^2$, ce qui se traduit analytiquement par l'équation donnée.

<u>Exemple :</u> Déterminons l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tels que $x^2+6x+y^2-10y-15=0$.

- *On a $(x+3)^2=x^2+6x+9$ donc $x^2+6x=(x+3)^2-9$.*
- *On a $(y-5)^2=y^2-10y+25$ donc $y^2-10y=(y-5)^2-25$.*

L'équation équivaut à $(x+3)^2-9+(y-5)^2-25-15=0\Leftrightarrow(x-(-3))^2+(y-5)^2=7^2$.
L'ensemble cherché est le cercle de centre $(-3;5)$ et de rayon 7.

Chapitre 9 – Probabilités

I – Quelques rappels de probabilités

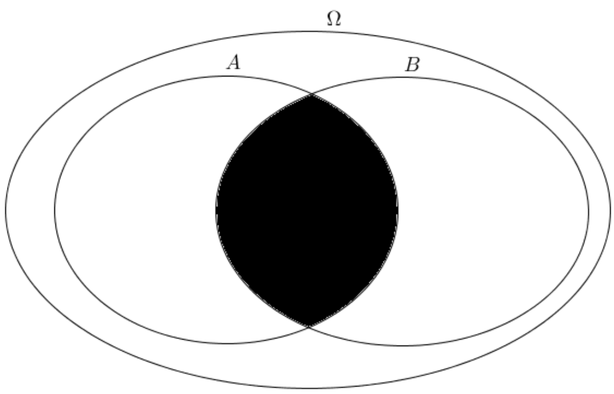
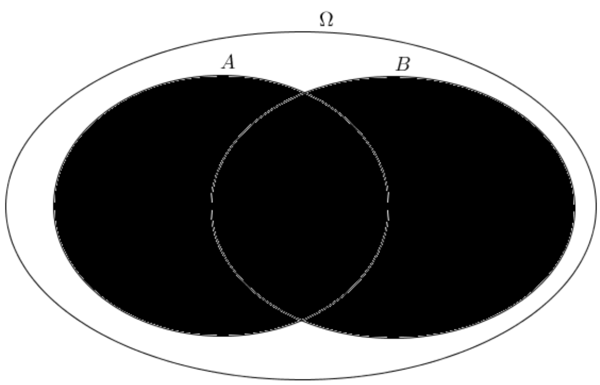
a) Évènements

On considère un univers Ω pour une expérience aléatoire. Un évènement A est une partie de Ω .

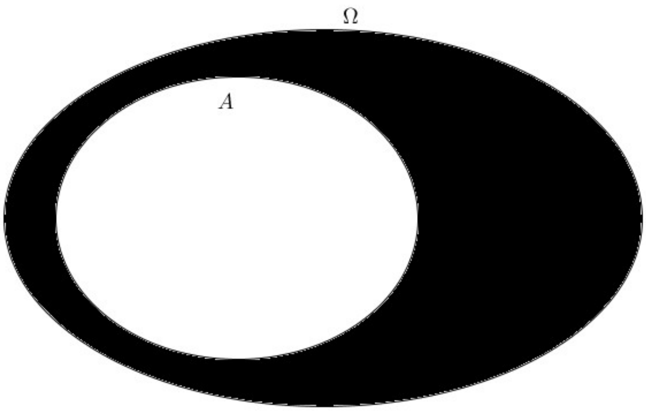
- Lorsqu'une issue ω appartient à un évènement A , on dit que ω réalise A ($\omega\in A$).
- $\emptyset$ est appelé évènement impossible, aucune issue ne le réalise.
- Ω est appelé évènement certain, toutes les issues le réalisent.

Soient A et B deux évènements.

- $A\cap B$ (« A inter B ») est l'évènement formé des issues qui réalisent *à la fois* A et B .
- $A\cup B$ (« A union B ») est l'évènement formé des issues qui réalisent *au moins* l'un des évènements A et B .

$A\cap B$	$A\cup B$
	

- Si aucune issue ne réalise A et B , c'est-à-dire si $A\cap B=\emptyset$, on dit que A et B sont incompatibles.
- $\overline{A}$ (« A barre ») est l'évènement contraire à l'évènement A . Il est formé des issues qui ne réalisent pas A .



- Pour tous évènements A et B , $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ et $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

b) Probabilités

On considère une loi de probabilité sur un univers Ω .
La probabilité d'un évènement A est la somme des probabilités des issues qui le réalisent. On note cette probabilité $P(A)$.

- $P(\emptyset)=0$
- $P(\Omega)=1$
- Pour tout évènement A , $0\leqslant P(A)\leqslant 1$.
- Pour tout évènement A , $P(\overline{A})=1-P(A)$.
- Pour tous évènements A et B , $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.
- Pour tous évènements A et B , $P(\overline{A\cap B})=P(\overline{A}\cup\overline{B})$ et $P(\overline{A\cup B})=P(\overline{A}\cap\overline{B})$.

II – Loi d'une variable aléatoire

a) Variable aléatoire

<u>Définition :</u> Ω est l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire.
Définir une <u>variable</u> aléatoire X sur Ω consiste à associer un nombre réel à chaque issue.

<u>Notation :</u> Soit $x\in\mathbb{R}$. L'évènement « X prend la valeur x » est noté $(X=x)$.

<u>Exemple :</u> *On lance deux fois de suite une pièce de monnaie. On note les côtés apparus : P ou F . On a donc $\Omega=\{PP\,;PF\,;FP\,;FF\}$. Pour chacune de ces issues, on associe le nombre X de fois où pile apparaît. On a alors une variable aléatoire X sur Ω , cette variable prend les valeurs 0, 1 ou 2. On a $(X=0)=\{FF\}$, $(X=1)=\{PF\,;FP\}$, $(X=2)=\{PP\}$.*

b) Loi de probabilité d'une variable aléatoire

<u>Théorème et définition :</u> Une loi de probabilité est définie sur Ω . $X(\Omega)=\{x_1\,;x_2\,;\dots;x_n\}$ est l'ensemble des valeurs prises par une variable aléatoire X .
Lorsque l'on associe à chaque valeur x_i la probabilité de l'évènement $(X=x_i)$, on définit une loi de probabilité sur $X(\Omega)$. Cette loi est la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

<u>Exemple :</u> *Pour X variable aléatoire égale au nombre de fois où pile apparaît pour deux lancés consécutifs d'une pièce de monnaie, on a : $P(X=0)=\frac{1}{4}$, $P(X=1)=\frac{1}{2}$ et $P(X=2)=\frac{1}{4}$.*

c) Espérance, variance, écart-type d'une variable aléatoire

Définitions : **L'espérance, la variance et l'écart-type d'une variable aléatoire correspondent respectivement à la moyenne, la variance et l'écart-type d'une série statistique, les probabilités jouant le rôle des fréquences.**

Théorème : $\boldsymbol{X}$ **est une variable aléatoire dont la loi est résumée par le tableau suivant.**

$\boldsymbol{x_i}$	x_1	x_2	...	x_n
$\boldsymbol{P(X=x_i)}$	p_1	p_2	...	p_n

Espérance : $\boldsymbol{E(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i x_1}$

Variance : $\boldsymbol{V(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i(x_i-E(X))^2}$ **ce qui équivaut à**

$\boldsymbol{V(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2-E(X)^2=E(X^2)-E(X)^2}$

Écart-type : $\boldsymbol{\sigma(X)=\sqrt{V(X)}}$

Exemple : Pour X *variable aléatoire égale au nombre de fois où pile apparaît pour deux lancers consécutifs d'une pièce de monnaie, on a :* $E(X)=1$ *,* $V(X)=\frac{1}{2}$ *,* $\sigma(X)=\sqrt{\frac{1}{2}}$ *.*

Les propriétés concernant une transformation affine vues en statistiques permettent d'obtenir ce résultat :

Théorème : **Pour toute variable aléatoire** $\boldsymbol{X}$ **et tous réels** $\boldsymbol{a}$ **et** $\boldsymbol{b}$ **, on a :**
$\boldsymbol{E(aX+b)=aE(X)+b}$ **et** $\boldsymbol{V(aX+b)=a^2V(X)}$ **.**

d) Loi de probabilité et distribution des fréquences

Après avoir retenu un modèle pour une expérience aléatoire, on peut simuler cette expérience.
On obtient alors, après N simulations, une *série statistique* d'effectif N .
Il y a un lien entre les *fréquences* des issues obtenues et les *probabilités* de ces issues :

Loi des grands nombres : **Pour une expérience donnée, les fréquences calculées à l'issue de** $\boldsymbol{N}$ **simulations se rapprochent des probabilités lorsque** $\boldsymbol{N}$ **devient grand.**

Exemple : Toujours en considérant notre variable aléatoire X *« nombre de fois où pile apparait pour deux lancers d'une pièce de monnaie », cela veut dire que lorsque l'on reproduit un grand nombre de fois l'expérience, la moyenne des valeurs de* X *va se rapprocher de l'espérance mathématique, c'est-à-dire 1 ici.*

Chapitre 10 – Suites numériques

I – Définition

Une suite numérique est une liste infinie de nombres réels dont chaque terme est numéroté : à chaque rang $n\in\mathbb{N}$, correspond un terme ***numéro*** n *de la suite.*

<u>Définition :</u> Soit $p\in\mathbb{N}$. Une suite numérique u est une fonction qui, à tout entier naturel $n\geqslant p$, associe un nombre réel noté $u(n)$ ou u_n : $n\overset{u}{\rightarrow}u_n$
On dit que la suite u est la suite de <u>terme général</u> u_n. Elle est souvent notée avec des parenthèses (u_n).
Comme elle est définie à partir du rang p, le réel u_p est le <u>terme initial</u>.

Indice	p	$p+1$	...	$n-1$	n	$n+1$	$n+2$	...
Terme	u_p	u_{p+1}	...	u_{n-1}	u_n	u_{n+1}	u_{n+2}	...

<u>Remarques :</u>
- La notation u_n se lit « u indice n ».
- Attention à l'écriture indicielle : ne pas confondre u_{n+1} qui est le terme d'indice $n+1$, c'est-à-dire le terme suivant u_n, et u_n+1 qui est le terme u_n augmenté de 1.
- La suite u est parfois notée $(u_n)_{n\geqslant p}$ pour indiquer qu'elle est définie à partir du rang p.

<u>Exemple :</u> On considère la suite des décimales de π, u_n étant la $n^{\text{ième}}$ décimale.
On a donc $u_1=1$, $u_2=4$, $u_3=1$.
$u_4=5$, $u_4+1=5+1=6$, $u_{4+1}=u_5=9$

II – Suites définies par une relation explicite

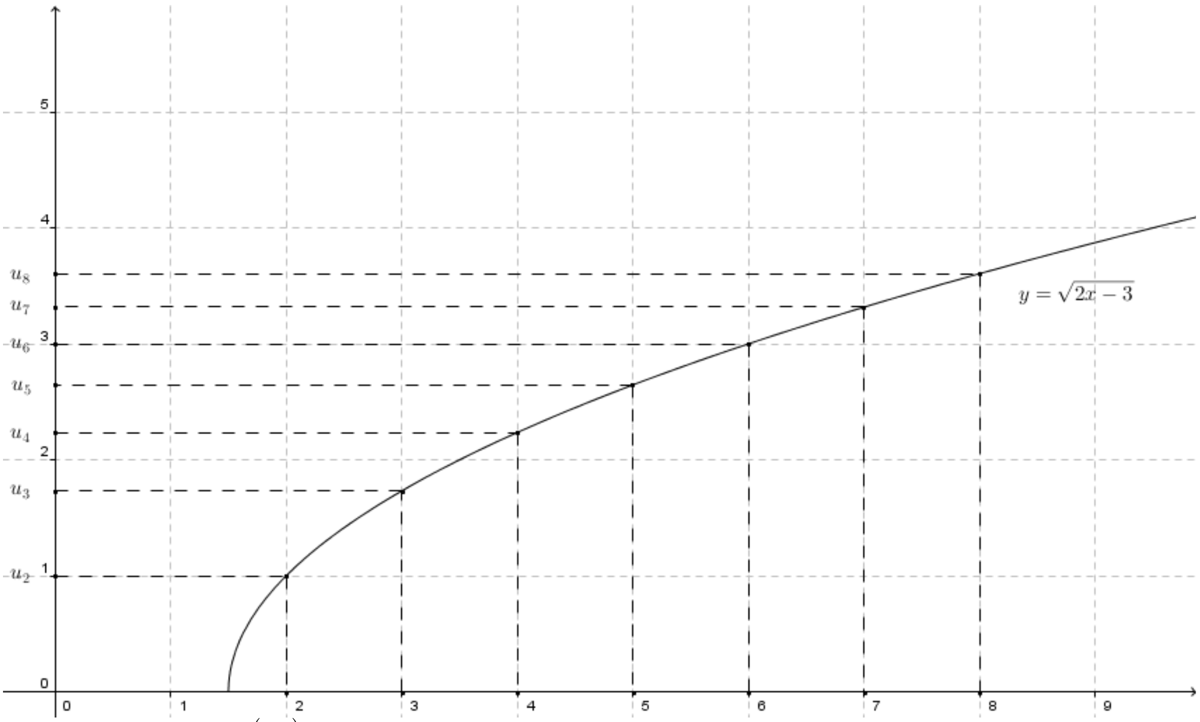
Une suite peut être définie par une formule explicite qui permet de calculer directement chaque terme à partir de son indice.

<u>Définition :</u> Si f est une fonction définie sur $[a;+\infty[$, on peut définir une suite u en posant, pour tout entier naturel $n\geqslant a$, $u_n=f(n)$.

<u>Exemple :</u> Soit f la fonction définie sur $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$ par $f(x)=\sqrt{2x-3}$. On peut alors définir une suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ par $u_n=f(n)=\sqrt{2n-3}$.
On a donc $u_2=f(2)=\sqrt{2\times2-3}=1$, $u_{n+1}=f(n+1)=\sqrt{2(n+1)-3}=\sqrt{2n-1}$.

<u>Représentation graphique :</u> La représentation graphique de la suite (u_n) est constituée des points A_n de coordonnées $(n;u_n)$.

<u>Exemple :</u> Pour $n\geqslant 2$, la suite u définie par $u_n=\sqrt{2n-3}$ est représentée par :



Les termes de la suite (u_n) sont les ordonnées des points d'abscisses entières de la courbe représentant la fonction utilisée.

III – Suites définies par une relation de récurrence

Une suite peut être définie par son terme initial et une relation de récurrence permettant de calculer un terme en fonction du précédent.

On ne peut donc plus calculer directement un terme d'indice n ; il faudra au préalable déterminer les termes précédents.

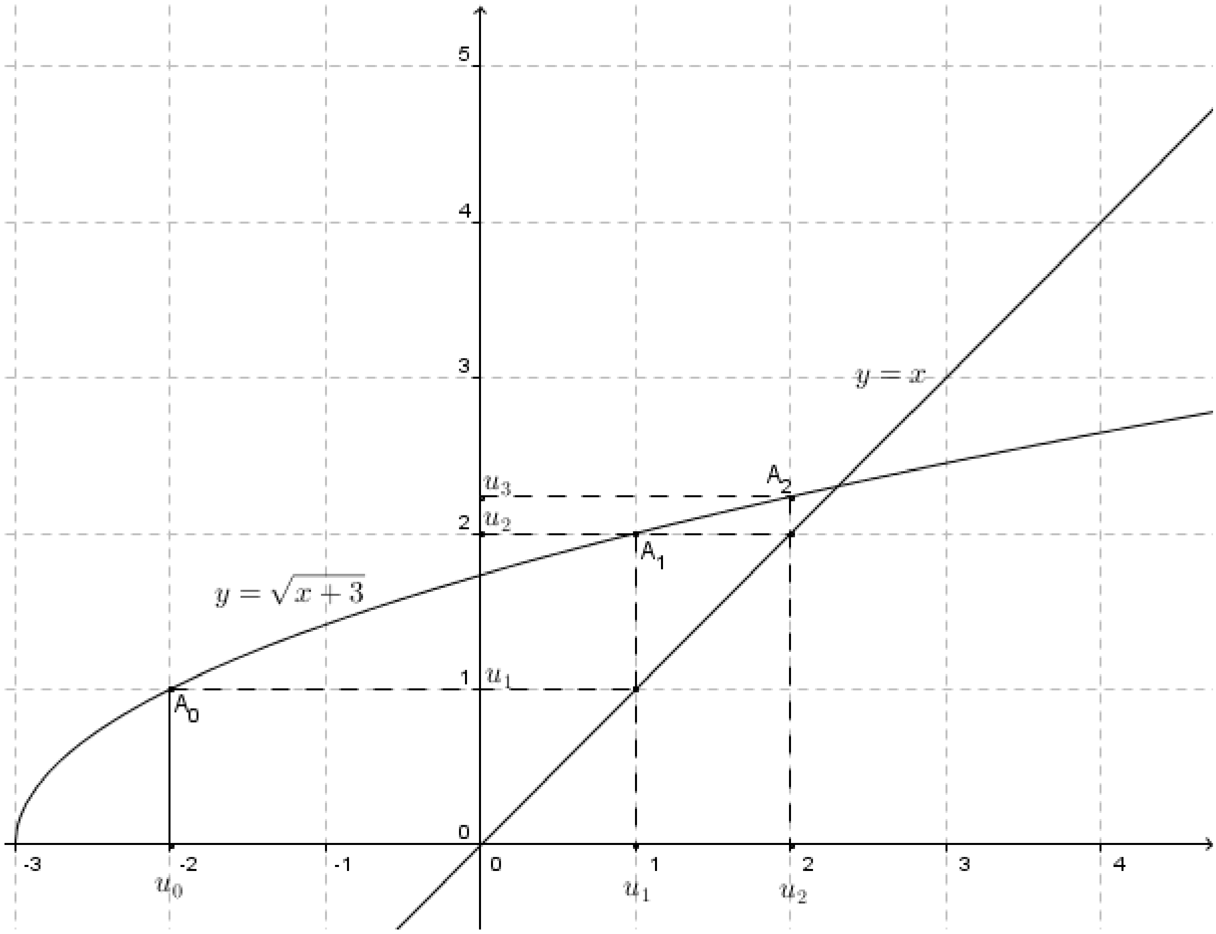
<u>Définition :</u> Soit f une fonction définie sur un intervalle I telle que, pour tout $x \in I$, $f(x) \in I$. Soit $a \in I$. On peut définir une suite u sur $\mathbb{N}$ par le terme initial $u_0 = a$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Tous les termes de la suite appartiendront à l'intervalle I ...

$$u_0 \xrightarrow{f} u_1 \xrightarrow{f} u_2 \xrightarrow{f} u_3 \ldots$$

<u>Exemple :</u> Les données $\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 3} \text{ avec } n \in \mathbb{N} \end{cases}$ *définissent une suite (u_n).*

La fonction f est définie sur $[-3;\infty[$. $u_0 = -2 \in [-3;\infty[$. Si $x \in [-3;\infty[$,
$x+3 \in [0;+\infty[\Rightarrow \sqrt{x+3} \in [0;+\infty[\Rightarrow f(x) \in [-3;+\infty[$.
La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.

Représentation graphique : Soit C_f la courbe représentant la fonction de notre exemple : f est définie sur $[-3;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x+3}$.
A_0 est le point de coordonnées $(u_0; f(u_0))$, c'est-à-dire de coordonnées $(u_0;u_1)$.
Pour construire $A_1(u_1;u_2)$, on a donc besoin de placer u_1 sur l'axe des abscisses : pour cela on projette A_0 sur la droite Δ d'équation $y=x$ parallèlement à l'axe des abscisses ; ce projeté a donc pour coordonnées $(u_1;u_1)$. Il suffit ensuite de projeter ce point sur la courbe C_f parallèlement à l'axe des ordonnées... On réitère ensuite ce procédé.



Théorème (admis) : Deux suites sont égales si et seulement si elles sont définies à partir du même rang, que leurs termes initiaux sont égaux, et qu'elles vérifient la même relation de récurrence permettant de calculer un terme à partir du précédent.

Exemple : On considère $\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=u_n+2n+1 \text{ avec } n\in\mathbb{N} \end{cases}$ *et* $v_n=n^2$ *avec* $n\in\mathbb{N}$. *Montrons l'égalité de ces deux suites :*

- u_n *et* v_n *sont définies à partir du même rang : 0.*
- $u_0=0$ *et* $v_0=0^2=0$ *donc* $u_0=v_0$.
- *Pour* $n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1}=(n+1)^2=n^2+2n+1=v_n+2n+1$.
  Les suites vérifient la même relation de récurrence.

Les deux suites sont donc égales.

IV – Sens de variation d'une suite numérique

<u>Définition :</u> Soit $p \in \mathbb{N}$. Une suite (u_n) est strictement croissante à partir du rang p si pour tout entier naturel $n \geqslant p$, on a $u_n < u_{n+1}$.

<u>Remarque :</u> On peut adapter cette définition aux suites croissantes, strictement décroissantes, décroissantes. Une suite est monotone lorsqu'elle est soit croissante, soit décroissante.

<u>Méthodes :</u>

- On peut déterminer, pour tout $n \geqslant p$, le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.
- On peut comparer, pour tout $n \geqslant p$, le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1, après s'être assuré que u_n était de signe constant pour tout $n \geqslant p$.

<u>Exemples :</u>

- *Si (u_n) est croissante à partir du rang 4, alors $u_4 \leqslant u_5 \leqslant \ldots \leqslant u_{n-1} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \ldots$*
- *La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par $u_n = \dfrac{1}{n+1}$. Étudions ses variations :*

  <u>Première méthode :</u> Pour $n \in \mathbb{N}$,
  $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+2} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{n+1}{(n+1)(n+2)} - \dfrac{n+2}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{-1}{(n+1)(n+2)}$ *donc*
  $u_{n+1} - u_n < 0 \Leftrightarrow u_{n+1} < u_n$ *. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante.*

  <u>Deuxième méthode :</u> Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\dfrac{1}{n+2}}{\dfrac{1}{n+1}} = \dfrac{n+1}{n+2} = 1 - \dfrac{1}{n+2} < 1 \Rightarrow u_{n+1} < u_n$

  donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

- *La suite $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas monotone, puisque le signe de ses termes alterne.*

<u>Définition :</u> Une suite est monotone à partir du rang p si elle est croissante à partir du rang p ou décroissante à partir du rang p .

V – Suites arithmétiques

a) Définition

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite **arithmétique** si chaque terme est obtenu à partir du précédent par **addition d'une constante**, c'est-à-dire s'il existe $r\in\mathbb{R}$ tel que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=u_n+r$.
La constante r est appelée la **raison** de la suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Exemples :
- *La suite $(0;1;2;3;4;\ldots)$ des entiers naturels, de terme général $u_n=n$, est une suite arithmétique de raison 1.*
- *La suite $(1;3;5;7;9;\ldots)$ des entiers naturels impairs, de terme général $u_n=2n+1$, est une suite arithmétique de raison 2.*
- *La suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=n^2$ n'est pas arithmétique car pour passer d'un terme au suivant, on n'ajoute pas le même nombre.*

b) Sens de variation

Théorème : Soit une suite arithmétique (u_n) de raison r.
- **Si $r>0$, alors la suite (u_n) est strictement croissante.**
- **Si $r<0$, alors la suite (u_n) est strictement décroissante.**
- **Si $r=0$, alors la suite (u_n) est constante.**

Graphiquement, les points illustrant la suite appartiennent à une droite dont le coefficient directeur est égal à r, le signe de la raison r permet de conclure.

Démonstration : Il suffit d'utiliser le fait que $u_{n+1}-u_n=r$, et conclure avec le signe de r.

c) Terme général d'une suite arithmétique

Théorème : Soit une suite arithmétique (u_n) de raison r ; alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$:
$u_n=u_0+nr$.
Plus généralement, pour tous entiers naturels n et k, on a $u_n=u_k+(n-k)r$.

Démonstration : Pour passer de u_0 à u_n, on ajoute n fois la raison :
$u_n=u_0+\underbrace{r+r+...+r}_{n\text{ termes}}=u_0+nr$.
On sait que $u_k=u_0+kr$ donc $u_0=u_k-kr$; or $u_n=u_0+nr$ donc $u_n=u_k-kr+nr=u_k+(n-k)r$.

d) Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique

Théorème : Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique, alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$,
$$u_0+u_1+\ldots+u_n=\sum_{k=0}^{n}u_k=(n+1)\left(\frac{u_0+u_n}{2}\right).$$

Moyen mnémotechnique : $\text{Somme}=(\text{nombre de termes})\times\dfrac{\text{premier terme}+\text{dernier terme}}{2}$.

Démonstration : Soit $S=u_0+u_1+\ldots+u_n$. On a également $S=u_n+u_{n-1}+\ldots+u_0$.
En ajoutant membre à membre, et en notant r la raison, on a :

$$2S=(u_0+u_n)+(u_1+u_{n-1})+\ldots+(u_n+u_0)=(u_0+u_0+nr)+(u_0+r+u_0+(n-1)r)+\ldots+(u_0+nr+u_0)$$

$$2S=\underbrace{(u_0+u_0+nr)+(u_0+u_0+nr)+\ldots+(u_0+u_0+nr)}_{n+1\text{ termes}}=(n+1)(u_0+u_n)\text{ donc } S=(n+1)\frac{u_0+u_n}{2}.$$

Exemples : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est arithmétique de raison 3 et* $u_0=2$.
Calculer $S_1=u_0+u_1+\ldots+u_{100}$ *et* $S_2=u_{10}+u_{11}+\ldots+u_{100}$.

$$S_1=101\times\frac{u_0+u_{100}}{2}=101\times\frac{u_0+u_0+100\times 3}{2}=101\times\frac{2+2+300}{2}=15\,352$$

$$S_2=(100-10+1)\times\frac{u_{10}+u_{100}}{2}=91\times\frac{u_0+10\times 3+u_0+100\times 3}{2}=91\times\frac{2+30+2+300}{2}=15\,197$$

VI – Suites géométriques

a) Définition

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite **géométrique** si chaque terme est obtenu à partir du précédent par **multiplication par une constante**, c'est-à-dire s'il existe $q\in\mathbb{R}$ tel que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=q\,u_n$.
La constante q est appelée la **raison** de la suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemples :

- *La suite* $(1;2;4;8;16;\ldots)$ *des puissances de 2, de terme général* $u_n=2^n$, *est une suite géométrique de raison 2.*
- *La suite définie sur* $\mathbb{N}$ *par* $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=(n+1)u_n \end{cases}$ *n'est pas géométrique car pour passer d'un terme au suivant, on ne multiplie pas par le même nombre :* $u_1=u_0$, $u_2=2u_1$, $u_3=3u_2$, ...

b) Terme général d'une suite géométrique

Théorème : Soit une suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **de raison** $q\neq 0$ **; alors, pour tout** $n\in\mathbb{N}$ **:** $u_n=u_0q^n$.
Plus généralement, pour tous entiers naturels n **et** k**, on a** $u_n=u_k\,q^{n-k}$.

Démonstration :
Pour passer de u_0 à u_n, on effectue n multiplications par la raison :
$u_n=u_0\times\underbrace{q\times q\times\ldots\times q}_{n\text{ facteurs}}=u_0q^n$.
Comme $u_k=u_0q^k$, $u_0=u_k\,q^{-k}$ car $q\neq 0$. Or $u_n=u_0q^n$ donc $u_n=u_k\,q^{-k}q^n=u_k\,q^{n-k}$.

c) Sens de variation

Théorème : Soit q un réel non nul.

- **Si $q>1$, alors la suite (q^n) est strictement croissante.**
- **Si $0<q<1$, alors la suite (q^n) est strictement décroissante.**
- **Si $q<0$, alors la suite (q^n) n'est pas monotone.**

Démonstration :
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $q^{n+1}-q^n=q^n(q-1)$.

- Si $q>0$, alors $q^n>0$ donc $q^{n+1}-q^n$ est du signe de $q-1$.
  • Si $q>1$, $q-1>0$, donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, $q^{n+1}-q^n>0$; (q^n) est strictement croissante.
  • Si $0<q<1$, $q-1<0$, donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, $q^{n+1}-q^n<0$; (q^n) est strictement décroissante.
- Si $q<0$, q^n et q^{n+1} sont de signes contraires, donc la suite (q^n) prend des valeurs alternativement positives et négatives : elle ne peut pas être monotone.

Remarque : Si $u_0\neq 0$, le fait de multiplier la suite (q^n) par u_0 inverse le sens de variation si et seulement si $u_0<0$.

On en déduit donc ce tableau donnant le sens de variation d'une suite géométrique de premier terme $u_0\neq 0$ et de raison $q\neq 0$:

	$q>1$	$0<q<1$	$q<0$	$q=1$
$u_0>0$	Strictement croissant	Strictement décroissant	Non monotone	Constante
$u_0<0$	Strictement décroissant	Strictement croissant	Non monotone	Constante

d) Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

Théorème : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q\neq 1$. Alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$,
$$u_0+u_1+\ldots+u_n=\sum_{k=0}^{n}u_k=u_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Moyen mnémotechnique : $Somme=(premier\,terme)\dfrac{1-(raison)^{(nombre\,de\,termes)}}{1-(raison)}$.

Démonstration : Soit $S=u_0+u_1+\ldots+u_n$. On a $-qS=-q\,u_0-q\,u_1-\ldots-q\,u_n=-u_1-u_2-\ldots-u_{n+1}$
En ajoutant membre à membre, on a $S-qS=(u_0+u_1+u_2+\ldots+u_{n-1}+u_n)-(u_1-u_2-\ldots-u_n-u_{n+1})$.
En simplifiant, il reste $(1-q)S=u_0-u_{n+1}$, or $q\neq 1\Leftrightarrow q-1\neq 0$ donc $S=\dfrac{u_0-u_0q^{n+1}}{(1-q)}=u_0\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Exemple : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison 3 et $u_0=2$.
Calculer $S=u_8+u_9+\ldots+u_{17}$.
$$S=u_8\frac{1-3^{17-8+1}}{1-3}=u_0\times 3^8\times\frac{1-3^{10}}{-2}=2\times 3^8\times\frac{1-3^{10}}{-2}=3^{18}-3^8=387\,413\,928.$$

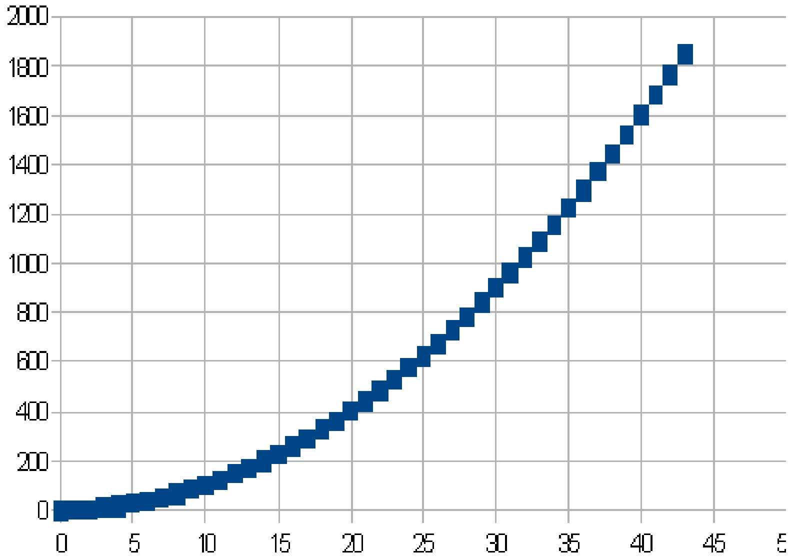
VII – Comportement d'une suite à l'infini

a) Divergence et limite

<u>Exemple :</u> Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n=n^2$.

On conjecture que la quantité u_n peut être rendue aussi grande qu'on veut, à condition que n soit suffisamment grand.

En effet, si l'on souhaite que $u_n>1\,000\,000$, il suffit de prendre $n>1000$.
Si l'on souhaite que $u_n>10^{18}$, il suffit de prendre $n>10^9$.
Pour tout $M>0$, dès que $n>\sqrt{M}$, alors $u_n>M$.

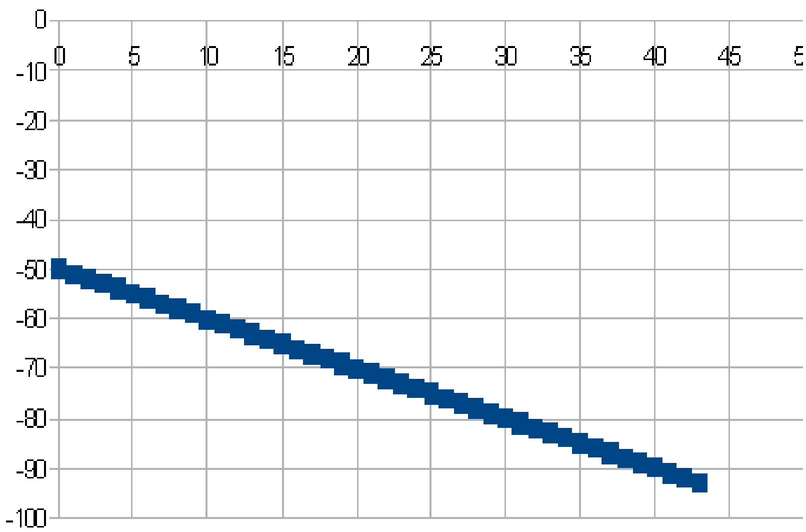


<u>Définition :</u> Dans ce cas, on dit que la suite (u_n) <u>diverge</u> vers $+\infty$ et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.

<u>Exemple :</u> Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n=-n-50$.

On conjecture que la quantité u_n peut être rendue aussi petite qu'on veut, à condition que n soit suffisamment grand.

En effet, si l'on souhaite que $u_n<-1000$, il suffit de prendre $n>950$.
Pour tout $M<0$, dès que $n>-M+50$, alors $u_n<M$.



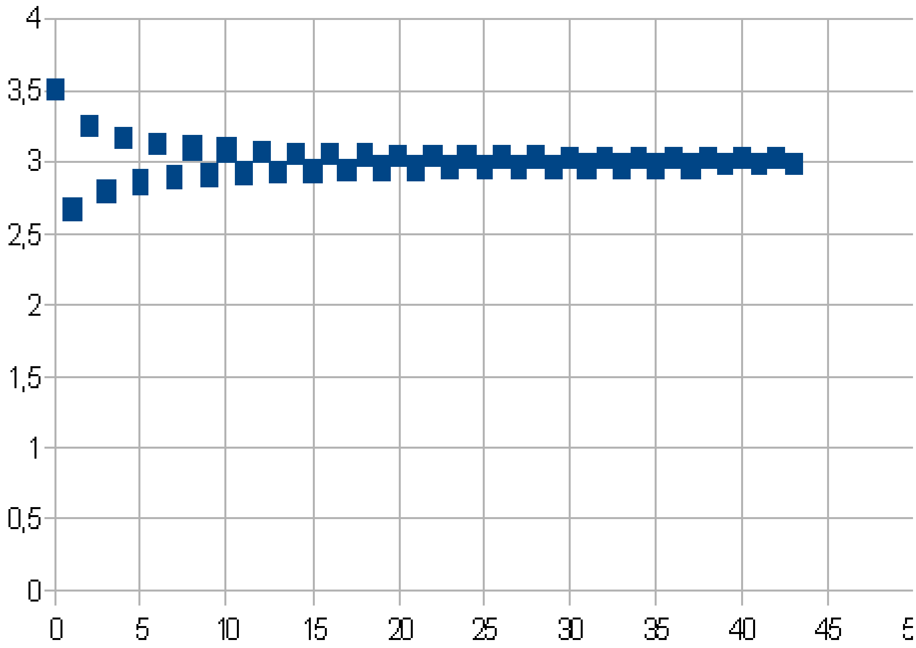
<u>Définition :</u> Dans ce cas, on dit que la suite (u_n) <u>diverge</u> vers $-\infty$ et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$.

b) Suite convergente

Exemple : *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par* $u_n=\frac{(-1)^n}{n+2}+3$.

On conjecture que la quantité u_n ***peut être rendue aussi proche de 3 qu'on veut, à condition que*** n ***soit suffisamment grand.***

En effet, si l'on souhaite que $|u_n-3|<0{,}001$ *, il suffit de prendre* $n>998$ *. Plus généralement, pour tout écart* $e>0$ *, dès que* $n>\frac{1}{e}-2$ *, alors* $|u_n-3|<e$.

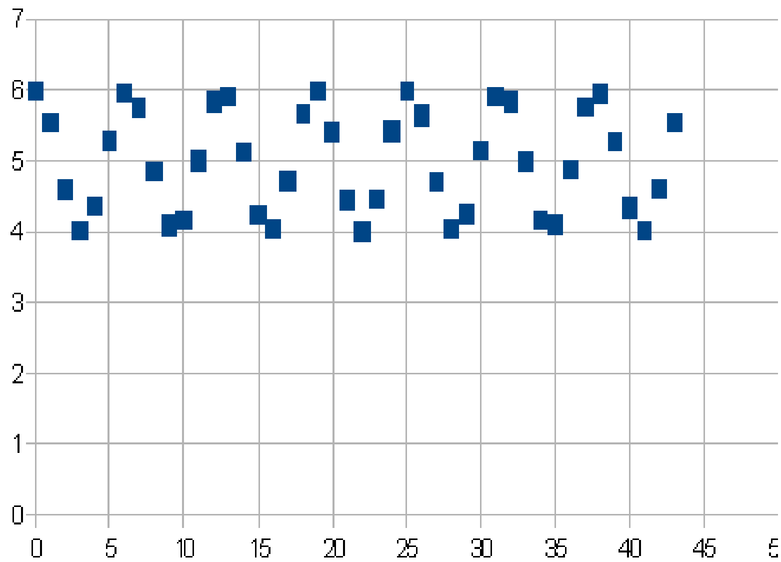


Définition : **Dans ce cas, on dit que la suite (u_n) converge vers 3 et on note $\lim_{n\to+\infty} u_n=3$.**

c) Suite divergente sans limite

Exemple : *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par* $u_n=\cos(n)+5$ *.*
La suite ne semble pas converger vers un réel, ni diverger vers $+\infty$ *ou* $-\infty$.

Définition : **Dans ce cas, on dit que la suite (u_n) diverge et n'admet pas de limite.**



Chapitre 11 – Loi de Bernoulli et loi binomiale

I – Modélisation d'une répétition d'expériences

a) Expériences indépendantes

<u>Définition :</u> On dit que deux expériences aléatoires sont indépendantes lorsque les résultats de l'une n'influent pas sur les probabilités des issues de l'autre.

<u>Exemple :</u> Dans une urne, il y a trois boules rouges et deux boules vertes.
Expérience 1 : On tire une première boule de l'urne.
Expérience 2 : On tire une deuxième boule de l'urne.

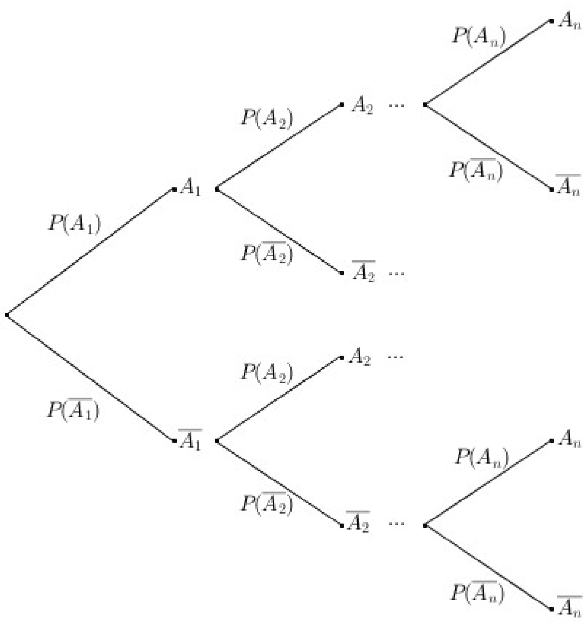
- *Si après l'expérience 1, **on remet la boule dans l'urne**, la probabilité de tirer une boule rouge (ou verte) lors de l'expérience 2 sera la même que dans l'expérience 1.*
  ***Les deux expériences sont indépendantes**.*
- *Si après l'expérience 1, **on ne remet pas la boule dans l'urne**, le contenu de l'urne est modifié. Selon le résultat de l'expérience 1, la probabilité de tirer par exemple une boule rouge lors de l'expérience 2 ne sera pas la même que dans l'expérience 1.*
  ***Les deux expériences ne sont pas indépendantes**.*

<u>Propriété :</u> Quand on répète une même expérience aléatoire dans les *mêmes conditions initiales*, alors les expériences aléatoires sont des *expériences indépendantes*.

<u>Exemple :</u> Si on lance une pièce de monnaie 10 fois de suite, on a 10 expériences indépendantes.

b) Répétition d'une même expérience

<u>Propriété :</u> On répète n fois de suite une expérience aléatoire dans les mêmes conditions initiales.
Si A_i est un évènement de la i ème expérience (avec i entier entre 1 et n), alors on a :
$\boldsymbol{P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \times P(A_2) \times \ldots \times P(A_n)}$ **.**



Cette probabilité correspond au chemin supérieur de l'arbre, qui contient 2^n chemins.

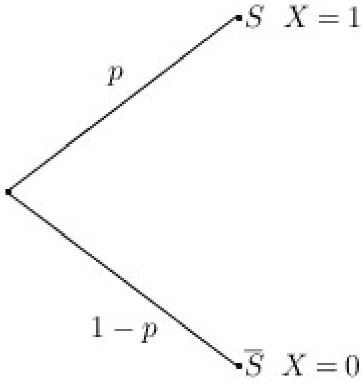
<u>Exemple :</u> On suppose que l'on lance 4 fois une pièce de monnaie truquée : la probabilité d'obtenir « Face » étant 0,7.
On note F_i l'évènement « Obtenir Face au i ème essai ».
La probabilité d'obtenir 4 fois « Face » est donc $P(F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4) = 0{,}7^4 = 0{,}2401$.

II – Loi de Bernoulli

<u>Définition :</u> Soit $p \in [0;1]$. On considère une expérience aléatoire à deux issues :

- **S (appelée succès) avec une probabilité p,**
- **$\overline{S}$ (appelée échec) avec donc une probabilité $1-p$.**

Cette situation constitue une *épreuve de Bernoulli*.
Soit X la variable aléatoire prenant la valeur 1 si S est réalisé et 0 sinon.
La loi de probabilité de X est appelée *loi de Bernoulli*.



x	0	1
$P(X=x)$	$1-p$	p

<u>Exemple :</u> Dans une usine, la probabilité qu'un article fabriqué présente un défaut est 0,02.
Soit X la variable aléatoire qui vaut 1 si l'article présente un défaut et 0 sinon.
X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p=0{,}02$.

<u>Propriétés :</u> Soit X une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $p \in [0;1]$. Alors :

- $E(X)=p$
- $V(X)=p(1-p)$
- $\sigma(X)=\sqrt{p(1-p)}$

<u>Preuves :</u>

- $E(X)=(1-p)\times 0+p\times 1=p$
- $V(X)=E(X^2)-E(X)^2=(1-p)\times 0^2+p\times 1^2-p^2=p-p^2=p(1-p)$
- $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{p(1-p)}$

<u>Exemple :</u> En reprenant l'exemple ci-dessus :

- $E(X)=0{,}02$
- $V(X)=0{,}02(1-0{,}02)=0{,}02\times 0{,}98=0{,}0196$
- $\sigma(X)=\sqrt{0{,}0196}=0{,}14$

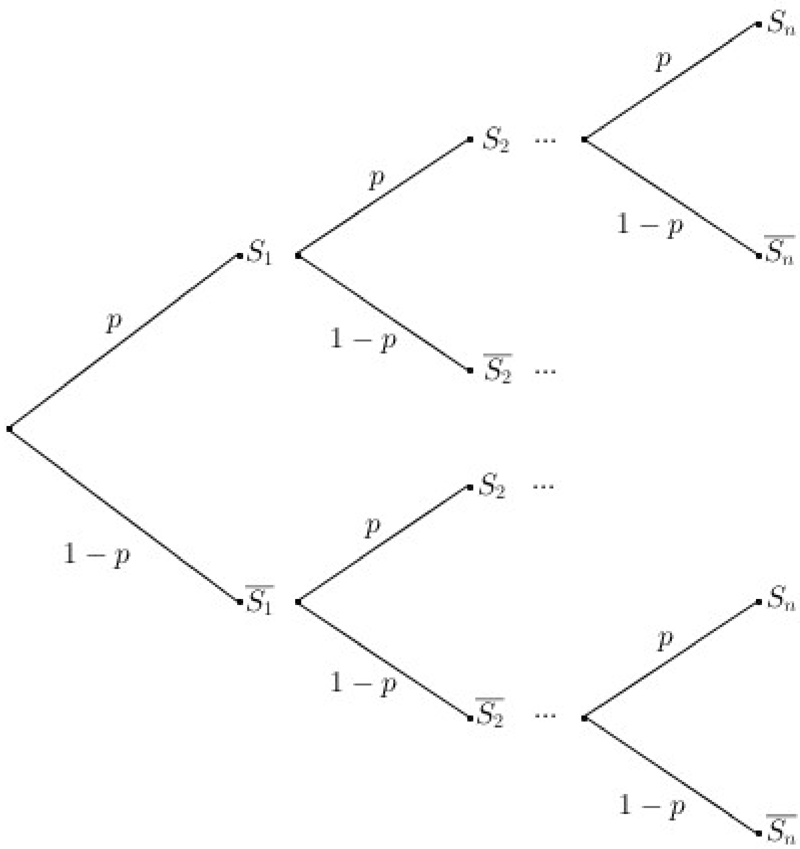
III – Loi binomiale

a) Schéma de Bernoulli

Définition : **Lorsqu'on répète une même épreuve de Bernoulli n fois de façons indépendantes, on dit que l'on est en présence d'un *schéma de Bernoulli*.**

Cette situation peut être résumée par un arbre :

Cet arbre possède 2^n chemins.



b) Coefficients binomiaux

Définition : **Soient n et k deux entiers naturels tels que $0 \leqslant k \leqslant n$.**

$\binom{n}{k}$ est appelé *coefficient binomial*, et se lit « combinaison de k parmi n ».

$\binom{n}{k}$ donne le nombre de chemins de l'arbre correspondant à k succès parmi les n répétitions d'une épreuve de Bernoulli.

Remarques : Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

- $\binom{n}{n}=1$, car un seul chemin représente n succès lors des n répétitions (c'est le chemin supérieur dans l'arbre).
- $\binom{n}{0}=1$, car un seul chemin représente n échecs lors des n répétitions (c'est le chemin inférieur dans l'arbre).
- $\binom{n}{1}=n$, car n chemins représente 1 succès lors des n répétitions : en effet, cet unique succès peut se produire à la première épreuve, ou à la deuxième, …, ou à la dernière épreuve.

Propriétés : **Soient n un entier non nul, et k un entier.**

- **Si $0 \leqslant k \leqslant n$, on a $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$**
- **Si $0 \leqslant k \leqslant n-1$, on a $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$**

Preuves :

- Pour $0 \leqslant k \leqslant n$, $\binom{n}{k}$ est le nombre de chemins réalisant k succès pour n répétitions.
  Or, à chaque chemin contenant k succès, on peut associer un chemin contenant k échecs – il suffit pour cela d'inverser les notations « succès » et échecs » : le chemin $S_1-S_2-\overline{S_3}-S_4-\overline{S_5}$ est donc associé à $\overline{S_1}-\overline{S_2}-S_3-\overline{S_4}-S_5$.
  Il y a donc autant de chemins avec k succès qu'avec k échecs (soit $n-k$ succès) : $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$.
- Pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$, $\binom{n+1}{k+1}$ est le nombre de chemins réalisant $k+1$ succès pour $n+1$ répétitions. On peut partager ces chemins en deux catégories :
  - Ceux qui commencent par un succès : il reste donc n épreuves, et parmi celles-ci il doit y avoir encore k succès. Ce qui fait donc $\binom{n}{k}$ chemins possibles.
  - Ceux qui commencent par un échec : il reste donc n épreuves, et parmi celles-ci il doit y avoir encore $k+1$ succès. Ce qui fait donc $\binom{n}{k+1}$ chemins possibles.
  On a donc $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$.

c) Le triangle de Pascal

Le triangle de Pascal est un tableau qui donne les valeurs des coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$.

Comme $0 \leqslant k \leqslant n$, il a la forme d'un triangle. Il peut bien sûr être prolongé pour $n=4$, $n=5$, … et pour $k=4$, $k=5$, …

	$\boldsymbol{k=0}$	$\boldsymbol{k=1}$	$\boldsymbol{k=2}$	$\boldsymbol{k=3}$
$\boldsymbol{n=0}$	$\binom{0}{0}$			
$\boldsymbol{n=1}$	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$		
$\boldsymbol{n=2}$	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$	
$\boldsymbol{n=3}$	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$

Les remarques et propriétés précédentes permettent de calculer les coefficients :

- Pour $n\in\mathbb{N}$, $\binom{n}{0}=1$ donc dans la colonne « $k=0$ » toutes les valeurs valent 1.
- Pour $n\in\mathbb{N}$, $\binom{n}{n}=1$ donc dans la diagonale $\binom{0}{0}$, $\binom{1}{1}$, … toutes les valeurs valent 1.
- Pour $0\leqslant k\leqslant n-1$, $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$ donc la valeur de la case $\binom{n+1}{k+1}$ s'obtient en ajoutant la case du dessus $\binom{n}{k+1}$ avec la case à côté de cette dernière $\binom{n}{k}$.

On obtient donc :

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$
$n=0$	1			
$n=1$	1	1		
$n=2$	1	2	1	
$n=3$	1	3	3	1

<u>Remarque :</u> La calculatrice permet de calculer n'importe quel coefficient binomial.

d) Loi binomiale

<u>Définition :</u> On répète une même épreuve de Bernoulli de paramètre $p\in[0;1]$ n fois de façons indépendantes (schéma de Bernoulli). Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de succès (c'est-à-dire le nombre de « 1 ») parmi les n expériences.
Alors, on dit que X suit la *loi binomiale* de paramètres n et p. On note $X\sim B(n;p)$.

<u>Exemple :</u> Si on joue sept fois à un jeu dont la probabilité de gagner à chaque fois est 0,4, la variable aléatoire X représentant le nombre de fois où l'on gagne suit une loi binomiale $B(7;0{,}4)$.

<u>Théorème (loi de probabilité d'une loi binomiale) :</u> Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n\in\mathbb{N}$ et $p\in[0;1]$ ($X\sim B(n;p)$).
Alors, pour $0\leqslant k\leqslant n$, $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.

<u>Preuve :</u> En utilisant l'arbre, on constate que $X=k$ est réalisé si un chemin comporte k succès et donc $n-k$ échecs. En faisant le produit des probabilités des branches, la probabilité d'un tel chemin est donc $p^k(1-p)^{n-k}$. Comme par définition il y a $\binom{n}{k}$ chemins avec k succès, on a le résultat souhaité.

<u>Propriétés :</u> Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p.

- $E(X)=np$
- $V(X)=np(1-p)$
- $\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}$

Exemple : *Si X est une variable aléatoire suivant une loi binomiale $B\left(4;\frac{1}{3}\right)$, alors :*

$$P(X=3)=\binom{4}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)^{4-3}=4\left(\frac{1}{3}\right)^{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{1}=4\times\frac{1}{27}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{81}$$

$$E(X)=4\times\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$

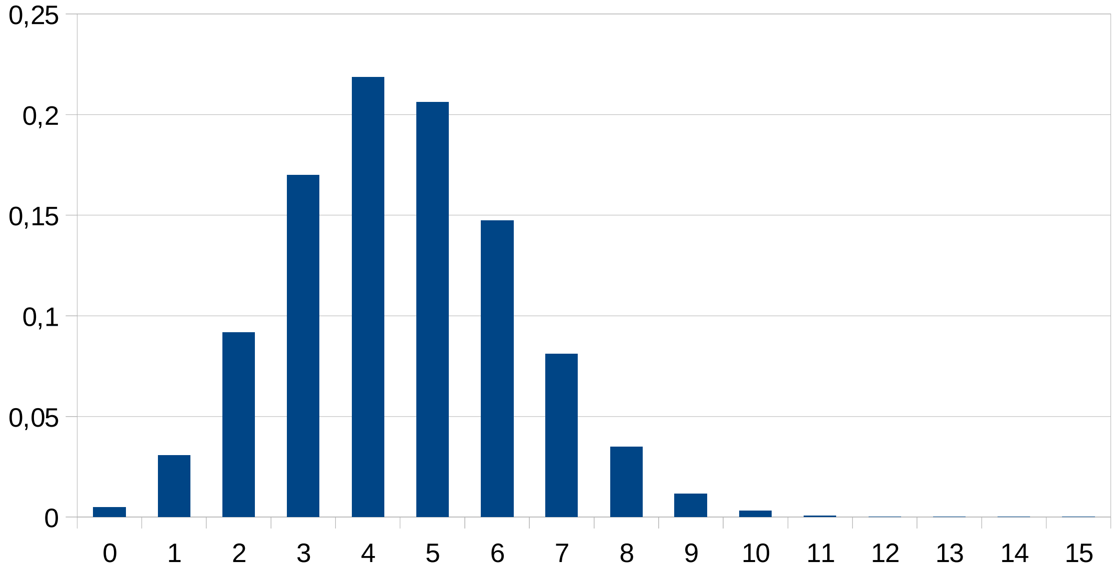
$$V(X)=4\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{9}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

IV – Loi binomiale et échantillonnage

a) Représentation graphique d'une loi binomiale

On considère dans cette partie une variable aléatoire X suivant une loi binomiale $B(15;0,3)$.
On construit un diagramme représentant cette loi : en abscisse, ce sont les valeurs k de la variable aléatoire X (avec $0\leqslant k\leqslant 15$), et en ordonnée, les probabilités $P(X=k)$.



On a $E(X)=15\times 0,3=4,5$. On remarque que les valeurs de X les plus probables sont centrées autour de l'espérance de X : pour des valeurs éloignées de $E(X)$, la probabilité que X prenne ces valeurs est très faible.
En réalité, cette observation est vraie pour n'importe quelle loi binomiale.

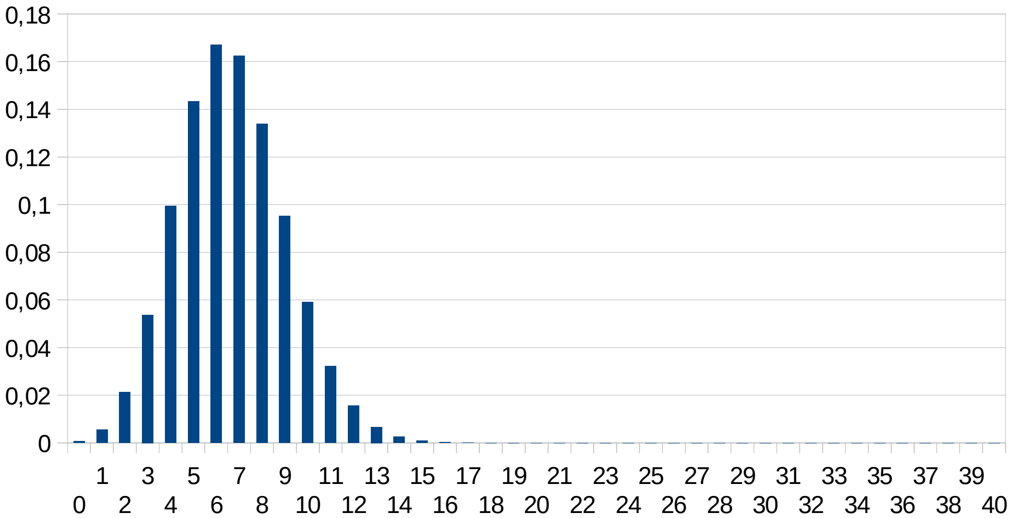
b) Échantillonnage et règle de décision

Exemple : *On cherche à savoir si un dé est truqué. Pour cela, on lance 40 fois un dé et on regarde la fréquence d'apparition de la face 6. Soit X le nombre de fois où 6 apparait.* ***S'il n'est pas truqué****, X suit une loi binomiale de paramètres 40 et $\frac{1}{6}$, et alors $E(X)=40\times\frac{1}{6}=\frac{20}{3}\approx 6{,}67$.*
La face 6 devrait apparaitre en moyenne 6,67 fois environ.
Par calculs, en utilisant la loi de X, on peut déterminer que dans 95 % des cas, X appartient à l'intervalle $\left[\frac{2}{40};\frac{12}{40}\right]$. Il y a donc 95 % de chances que X soit entre 2 et 12.

Définition : Soit $X \sim B(n;p)$. L'intervalle de fluctuation à 95 % d'une fréquence correspondant à la réalisation de X, sur un échantillon aléatoire de taille n, est l'intervalle $\left[\frac{a}{n};\frac{b}{n}\right]$ défini par :

- **a est le plus petit entier tel que $P(X\leqslant a)>0{,}025$.**
- **b est le plus petit entier tel que $P(X\leqslant b)\geqslant 0{,}975$.**

Remarque : $0{,}025=2{,}5\,\%$ et $0{,}975=97{,}5\,\%=100\,\%-2{,}5\,\%$. Pour notre exemple, on a :



Cela veut dire que 95 % environ des valeurs sont dans l'intervalle $[2;12]$, 2,5 % environ des valeurs sont dans $[0;2[$, et 2,5 % environ des valeurs sont dans $]12;40]$.

Règle de décision : Si la fréquence observée f appartient à l'intervalle de fluctuation à 95 % $\left[\frac{a}{n};\frac{b}{n}\right]$, on considère que l'hypothèse selon laquelle la proportion théorique est p dans la population n'est pas remise en question et on l'accepte ; sinon, on rejette l'hypothèse selon laquelle cette proportion vaut p.

Exemple : *Si la fréquence observée de la face 6 sur 40 essais appartient à $\left[\frac{2}{40};\frac{12}{40}\right]$, on peut considérer que la face 6 n'est pas truquée ; si elle n'y appartient pas, on peut considérer le dé truqué.*