Cours d’analyse – Brevet de Technicien Supérieur Conception et Réalisation en Chaudronnerie Industrielle

Chapitre 1 – Fonctions de référence

Ce chapitre consiste en des rappels des années antérieures.

I – Fonctions affines

<u>Définition :</u> une fonction affine est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle qu'il existe deux nombres réels m et p tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = mx + p$.

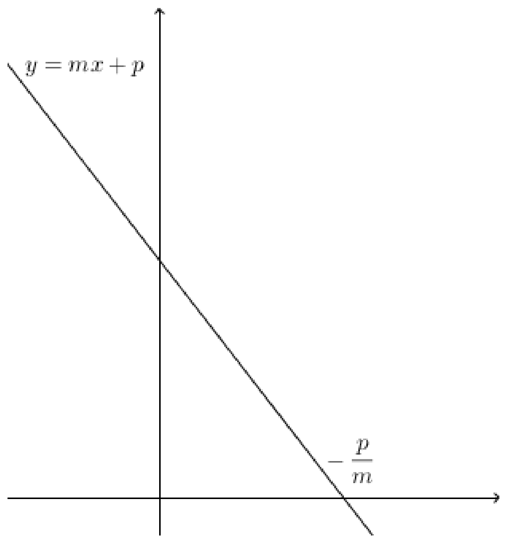
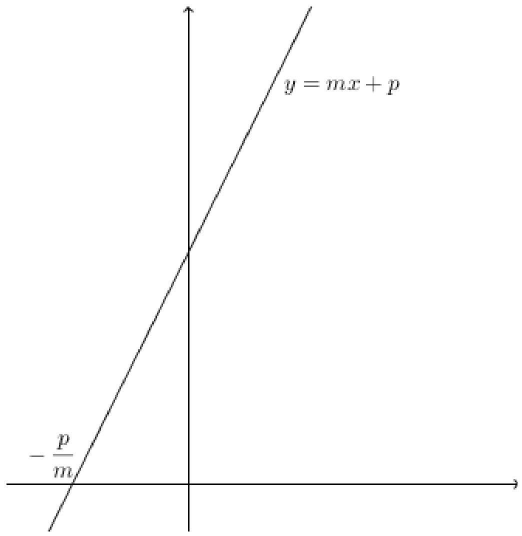
Une fonction affine est représentée par une droite dans un repère.

a) Signe d'une fonction affine

<u>Théorème :</u> Soit $f(x) = mx + p$ une fonction affine (définie sur $\mathbb{R}$) telle que $m \neq 0$.

- **La fonction f s'annule en $x = -\frac{p}{m}$.**
- **Si $m > 0$, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.**
- **Si $m < 0$, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.**

On peut résumer ceci graphiquement :

$m<0$	$m>0$
	

Ce théorème permet de déduire le tableau de signe d'une fonction affine :

<table>
<tr><th>$m<0$</th><th>$m>0$</th></tr>
<tr><td>

x	$-\infty$	$-\frac{p}{m}$	$+\infty$
$mx+p$	$-$	0	$+$

</td><td>

x	$-\infty$	$-\frac{p}{m}$	$+\infty$
$mx+p$	$+$	0	$-$

</td></tr>
<tr><td>$mx+p>0 \Leftrightarrow x>-\frac{p}{m}$
$mx+p<0 \Leftrightarrow x<-\frac{p}{m}$</td><td>$mx+p>0 \Leftrightarrow x<-\frac{p}{m}$
$mx+p<0 \Leftrightarrow x>-\frac{p}{m}$</td></tr>
</table>

Rappel : Ce théorème permet de compléter les tableaux de signes lorsqu'on résout des inéquations, comme par exemple $(3x-2)(4x+7)>0$.

II – Fonction racine carrée

Définition : La fonction racine carrée est la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}$.
Elle est définie sur $[0;+\infty[$ car seuls les réels positifs ont une racine carrée.
Une racine carrée est toujours positive.

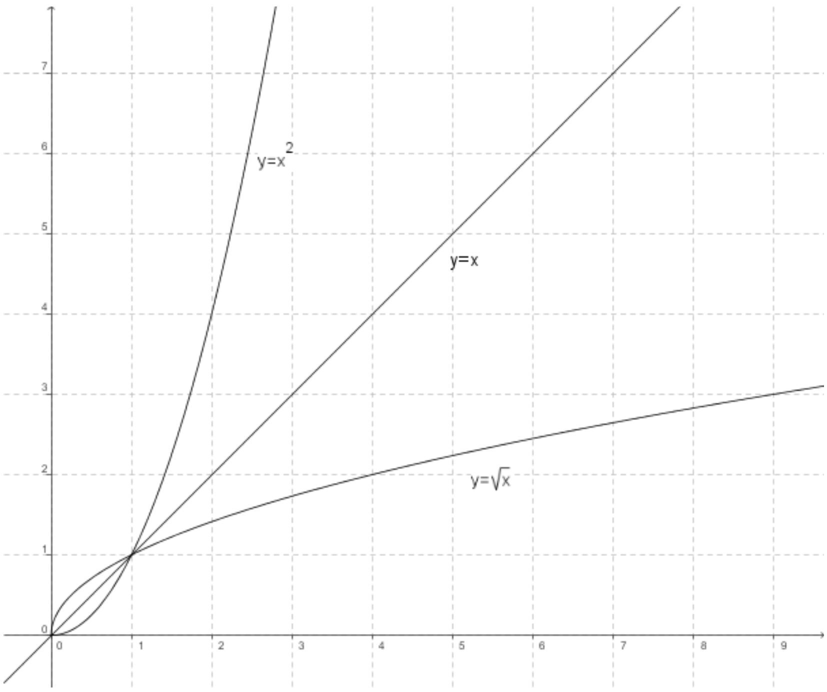
a) Sens de variation

La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

x	0	$+\infty$
f	0 $\nearrow$	

b) Représentation graphique

Les fonctions carré et racine carrée étant réciproques l'une de l'autre sur $[0;+\infty[$, leurs courbes dans un repère orthonormal sont symétriques par rapport à la droite $y=x$.



III – Fonctions polynômes de degré 2

a) Définition

Définition : On appelle *fonction polynôme* de degré 2 toute fonction P définie sur $\mathbb{R}$ pour laquelle il existe des réels $a \neq 0$, b , c tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait : $P(x) = ax^2 + bx + c$.

Exemples :

- *La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2 + x + \sqrt{2}$ est une fonction polynôme de degré 2. On a ici $a = -3$, $b = 1$, $c = \sqrt{2}$.*
- *La fonction carré f est une fonction polynôme du second degré, puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) = x^2 = 1x^2 + 0x + 0$. On a ici $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$.*

Définition : Soit P un trinôme du second degré de forme réduite $P(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$). On appelle discriminant du trinôme le réel noté Δ défini par $\Delta = b^2 - 4ac$.

Exemple : Pour $P(x) = 5x^2 - 2x + 3$, on a $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 5 \times 3 = -56$ puisque $a = 5$, $b = -2$ et $c = 3$.

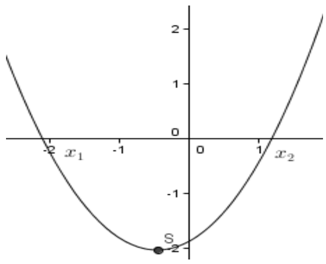
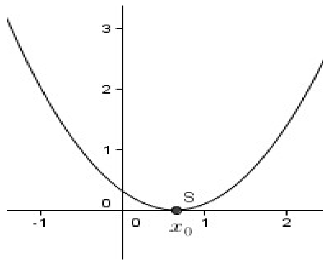
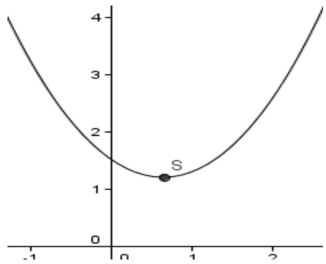
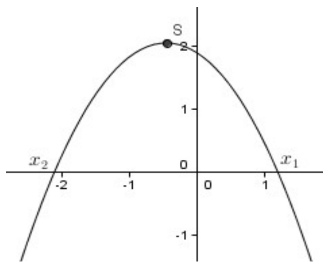
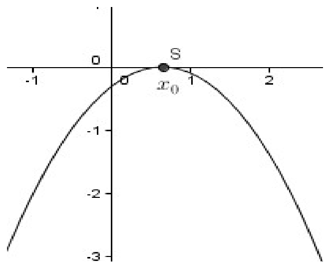
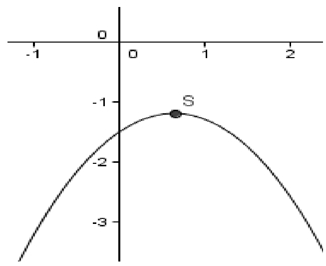
Représentation graphique : Dans un repère orthonormal, une fonction polynôme de degré 2 est représentée par une parabole de sommet S .

b) Tableau récapitulatif des trinômes de degré 2

$$P(x)=a\,x^2+b\,x+c \text{ (avec } a\neq 0\text{)}$$

Discriminant $\Delta=b^2-4ac$

Coordonnées du sommet $S\left(-\dfrac{b}{2a};-\dfrac{\Delta}{4a}\right)$

	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
Solutions de l'équation $a\,x^2+b\,x+c=0$	$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_0=-\dfrac{b}{2a}$ (racine double)	Pas de solution
Factorisation de $a\,x^2+b\,x+c$	$a(x-x_1)(x-x_2)$	$a(x-x_0)^2$	Pas de factorisation
Représentation graphique quand $a>0$			
Représentation graphique quand $a<0$			
Signe de $a\,x^2+b\,x+c$	x : $-\infty$ x_1 x_2 $+\infty$ $P(x)$: signe de a 0 signe de $-a$ 0 signe de a (en notant x_1 la plus petite racine)	x : $-\infty$ x_0 $+\infty$ $P(x)$: signe de a 0 signe de a	x : $-\infty$ $+\infty$ $P(x)$: signe de a

Chapitre 2 – Dérivation

I – Nombre dérivé et tangente

Dans toute cette partie, f est une fonction définie sur un intervalle I, et a un réel appartenant à I. C est la courbe représentative de f.

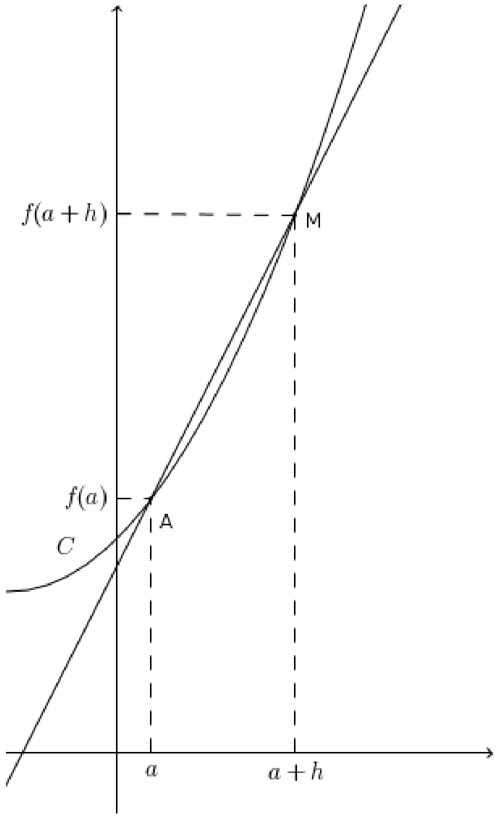
a) Nombre dérivé d'une fonction en un réel

Soit $h \neq 0$ un réel. On considère A le point de C d'abscisse a, et M le point de C d'abscisse $a+h$. A a donc pour coordonnées $(a;f(a))$, et M a pour coordonnées $(a+h;f(a+h))$.

Le coefficient directeur de la droite (AM) est donc $\frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Ce rapport est le *taux d'accroissement* de f entre a et $a+h$.

Ce rapport n'existe pas quand $h=0$, puisque l'on ferait une division par 0.

En revanche, on peut s'intéresser à ce qu'il devient quand h se rapproche de 0. On dit aussi « quand h tend vers 0 ».



<u>Définition :</u> Soient f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel appartenant à I. On dit que la fonction f est dérivable en a s'il existe un réel, que l'on note $f'(a)$, tel que $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$. Ce réel $f'(a)$, *s'il existe,* est le *nombre dérivé de la fonction f en a*.

<u>Exemple :</u> Soit f la fonction carré (définie sur $\mathbb{R}$). Cherchons si f est dérivable en -3 :

Soit $h \neq 0$, le taux d'accroissement de f entre -3 et $-3+h$ est :
$$\frac{f(-3+h)-f(-3)}{h} = \frac{(-3+h)^2-(-3)^2}{h} = \frac{9-6h+h^2-9}{h} = \frac{h(6+h)}{h} = 6+h.$$
Comme $\lim_{h \to 0} 6+h = 6$, f est dérivable en -3 et $f'(-3)=6$.

b) Tangente en un point à une courbe

Graphiquement, quand h tend vers 0, le point M se rapproche de A.

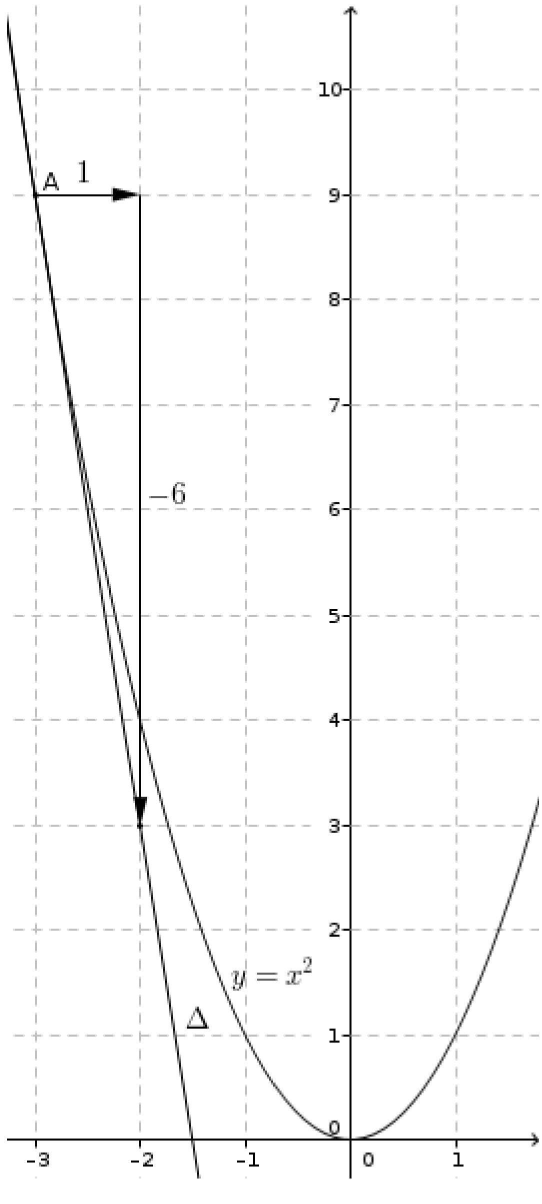
Dire que le taux d'accroissement de f entre a et $a+h$ tend vers $f'(a)$ revient donc à dire que le coefficient directeur de (AM) tend vers $f'(a)$ quand M se rapproche de A.

<u>Définition :</u> Si f est dérivable en a, on appelle *tangente* en A à la courbe C la droite Δ qui passe par A et qui a pour coefficient directeur $f'(a)$.

<u>Exemple :</u> On a déterminé précédemment que la fonction carré f était dérivable en -3 et que $f'(-3)=-6$.
Comme $f(-3)=(-3)^2=9$, la tangente à la courbe de f au point d'abscisse -3 est donc la droite passant par $A(-3;9)$ et ayant pour coefficient directeur -6.

Graphiquement, on constate que la tangente frôle la courbe en A.

On peut donc déterminer l'équation de Δ :
Son équation est $y=-6x+b$ or $A(-3;9)\in\Delta$ donc $9=-6\times 3+b \Leftrightarrow 9=18+b \Leftrightarrow -9=b$.
Δ a pour équation $\boldsymbol{y=-6x-9}$.



<u>Théorème :</u> Si f est dérivable en a, Δ a pour équation $y=f'(a)(x-a)+f(a)$.

<u>Preuve :</u> L'équation de Δ est de la forme $y=f'(a)x+b$, puisque $f'(a)$ est son coefficient directeur. Comme $A(a, f(a))\in\Delta$, alors ses coordonnées vérifient l'équation :
$f(a)=f'(a)a+b$ donc $b=-f'(a)a+f(a)$, donc $y=f'(a)x-f'(a)a+f(a)$, soit $\boldsymbol{y=f'(a)(x-a)+f(a)}$.

II – Fonction dérivée

<u>Définition :</u> Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Si f est dérivable pour tout $x \in I$, on dit que f est dérivable sur I . La fonction qui à tout $x \in I$ associe le nombre dérivé $f'(x)$ est la fonction dérivée de f et se note f' .

<u>a) Dérivées des fonctions de référence</u>

D_f domaine de définition	$f(x)=$	$D_{f'}$ domaine de dérivabilité	$f'(x)=$
$\mathbb{R}$	k (constante)	$\mathbb{R}$	0
$\mathbb{R}$	x	$\mathbb{R}$	1
$\mathbb{R}$	x^2	$\mathbb{R}$	$2x$
$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$	$\frac{1}{x}$	$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$	$-\frac{1}{x^2}$
$\mathbb{R}$	x^n (avec $n \in \mathbb{N}^*$)	$\mathbb{R}$	$n x^{n-1}$
$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$	$\frac{1}{x^n}$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$)	$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$[0;+\infty[$	$\sqrt{x}$	$]0;+\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

<u>Exemple :</u> La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^8$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f'(x)=8x^7$.

b) Opérations sur les fonctions dérivables

Soient $k \in \mathbb{R}$, u et v deux fonctions dérivables sur un même intervalle I.

Si $f(x)=$	**Alors $f'(x)=$**
$k\,u(x)$ (avec k constante)	$k\,u'(x)$
$u(x)+v(x)$	$u'(x)+v'(x)$
$u(x)v(x)$	$u'(x)v(x)+v'(x)u(x)$
$(u(x))^n$ (avec $n \in \mathbb{N}$)	$n \times u'(x) \times (u(x))^{n-1}$
$\sqrt{u(x)}$ (avec $u(x)>0$ pour tout $x \in I$)	$\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
$\dfrac{1}{v(x)}$	$-\dfrac{v'(x)}{[v(x)]^2}$
$\dfrac{u(x)}{v(x)}$	$\dfrac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{[v(x)]^2}$

c) Exemples d'utilisation des formules

Exemples :

- *f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2+x^3$.*
  f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et
  $f'(x)=2x+3x^{3-1}=2x+3x^2$.

- *f est définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=3x^3-\dfrac{1}{x}$.*
  f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme somme de deux fonctions dérivables sur $]0\,;+\infty[$ et
  $f'(x)=3\times 3x^2-\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=9x^2+\dfrac{1}{x^2}$.

- *f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^3\times(4x-5)$.*
  f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$:
  $f(x)=u(x)v(x)$ *avec* $u(x)=2x^3$ *et* $v(x)=4x-5$. $u'(x)=2\times 3x^2=6x^2$ *et* $v'(x)=4$.
  $f'(x)=u'(x)v(x)+v'(x)u(x)=6x^2(4x-5)+4\times 2x^3=6x^2(4x-5)+8x^3$.

- *f est définie sur $[10\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{4x-3}$.*
  f est dérivable sur $[10\,;+\infty[$ comme inverse d'une fonction dérivable sur $[10\,;+\infty[$.
  $f(x)=\dfrac{1}{v(x)}$ *avec* $v(x)=4x-3$. $v'(x)=4$.
  $f'(x)=-\dfrac{v'(x)}{[v(x)]^2}=-\dfrac{4}{(4x-3)^2}$.

- f est définie sur $[10\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^2}{4x-3}$.

  f est dérivable sur $[10\,;+\infty[$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur $[10\,;+\infty[$.

  $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x)=x^2$ et $v(x)=4x-3$. $u'(x)=2x$ et $v'(x)=4$.

  $f'(x)=\dfrac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{[v(x)]^2}=\dfrac{2x(4x-3)-4\times x^2}{(4x-3)^2}=\dfrac{8x^2-6x-4x^2}{(4x-3)^2}=\dfrac{4x^2-6x}{(4x-3)^2}$.

- f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(1-2x)^4$. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

  $f(x)=(u(x))^4$ avec $u(x)=1-2x$. $u'(x)=-2$.

  $f'(x)=4\times u'(x)\times(u(x))^{4-1}=4\times(-2)\times(1-2x)^3=-8(1-2x)^3$.

III – Dérivée et variations

<u>**Théorème (admis) :**</u> **Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I contenu dans son ensemble de définition D_f.**

- **Si $f'(x)>0$ pour tout $x\in I$ (éventuellement, f' peut s'annuler en un nombre fini de valeurs) alors f est strictement croissante sur I.**
- **Si $f'(x)<0$ pour tout $x\in I$ (éventuellement, f' peut s'annuler en un nombre fini de valeurs) alors f est strictement décroissante sur I.**
- **Si pour tout $x\in I$ $f'(x)=0$, alors f est constante sur I.**

<u>Remarque :</u> Comme le dit le théorème, même si f est strictement monotone sur I, la fonction f' peut s'annuler sur I : par exemple, la fonction cube f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, est dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f'(x)=3x^2$, et $f'(0)=3\times 0^2=0$.

<u>Exemple :</u> Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2+2x-1$. Étudions ses variations.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f'(x)=2x+2$.
On dresse le tableau de variations en utilisant le signe de la dérivée. Le signe de la dérivée est facile à obtenir ici : c'est une fonction affine, qui s'annule en $x=-1$ et qui est strictement croissante puisque son coefficient directeur est supérieur strictement à 0.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		↘	-2	↗	

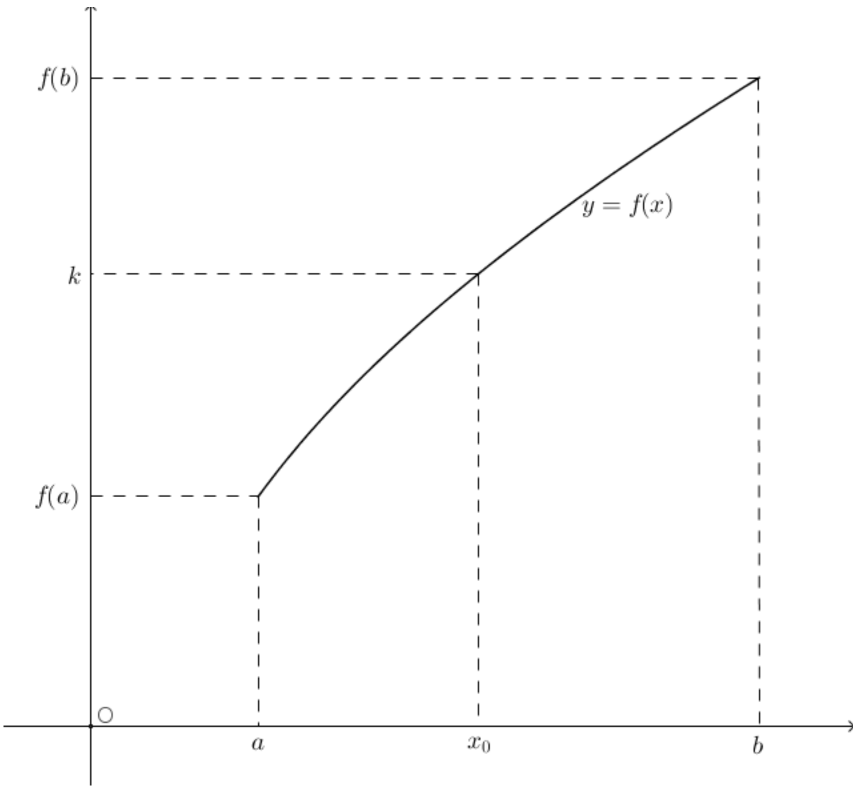
On a en effet $f(-1)=(-1)^2+2\times(-1)-1=-2$.

IV – Théorème des valeurs intermédiaires

<u>Théorème des valeurs intermédiaires (admis) :</u> Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a;b]$, et soit k un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

Si pour tout $x\in]a;b[$ on a $f'(x)>0$ ou $f'(x)<0$, alors l'équation $f(x)=k$ admet une unique solution x_0 dans $[a;b]$.

<u>Exemple :</u>



On remarque que l'hypothèse « $f'(x)>0$ ou $f'(x)<0$ » peut être remplacée par l'hypothèse « f est strictement croissante ou f est strictement décroissante ».

Chapitre 3 – Limites de fonctions

I – Limite finie d'une fonction à l'infini

a) Limites à connaître

<u>Exemple :</u> Soit f la fonction définie $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{x}$.

Voici un tableau de valeurs :

x	1	10	100	1000	10000	10^8	10^{12}
$f(x)$	1	0,1	0,01	0,001	0,0001	10^{-8}	10^{-12}

On peut remarquer que lorsque x devient de plus en plus grand (on dit que x tend vers $+\infty$), alors $f(x)$ se rapproche de 0 (on dit que $f(x)$ a pour limite 0). Ceci se note : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$.

<u>Théorème :</u> Soit n un entier naturel non nul. On a alors $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}=0$ et $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n}=0$.

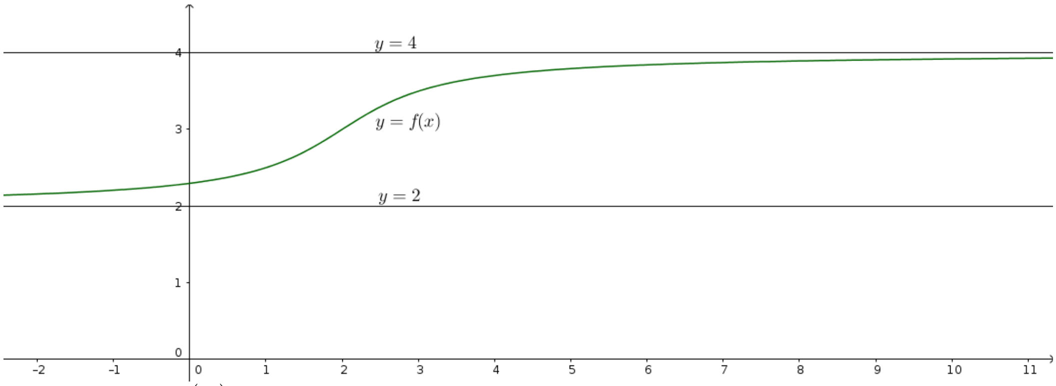
b) Interprétation graphique

Soient f une fonction et a un réel tels que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=a$. Alors, on dit que la droite d'équation $y=a$ est <u>asymptote horizontale</u> à la courbe de f en $+\infty$.

Graphiquement, cela signifie que lorsque x devient très grand, la courbe de f se rapproche de la droite d'équation $y=a$.

La situation est analogue en $-\infty$.

Exemple : *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ ci-dessous.*



On constate que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 4$, c'est-à-dire que la droite $y = 4$ est asymptote horizontale à la courbe de f en $+\infty$, et que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$, c'est-à-dire que la droite $y = 2$ est asymptote horizontale à la courbe de f en $-\infty$.

II – Limite infinie d'une fonction à l'infini

a) Limites à connaître

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. On remarque que $f(x)$ peut devenir aussi grand que l'on veut, en choisissant x suffisamment grand : on dit alors que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$; et on note $\boldsymbol{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$.

De même, on remarque que $f(x)$ peut devenir aussi grand que l'on veut, en choisissant x suffisamment petit : on dit alors que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$; et on note $\boldsymbol{\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty}$.

Théorème : Soit n un entier naturel non nul. On a alors $\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$.

Si n est pair, on a $\lim_{x \to -\infty} x^n = +\infty$; si n est impair, on a $\lim_{x \to -\infty} x^n = -\infty$.

De plus, $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

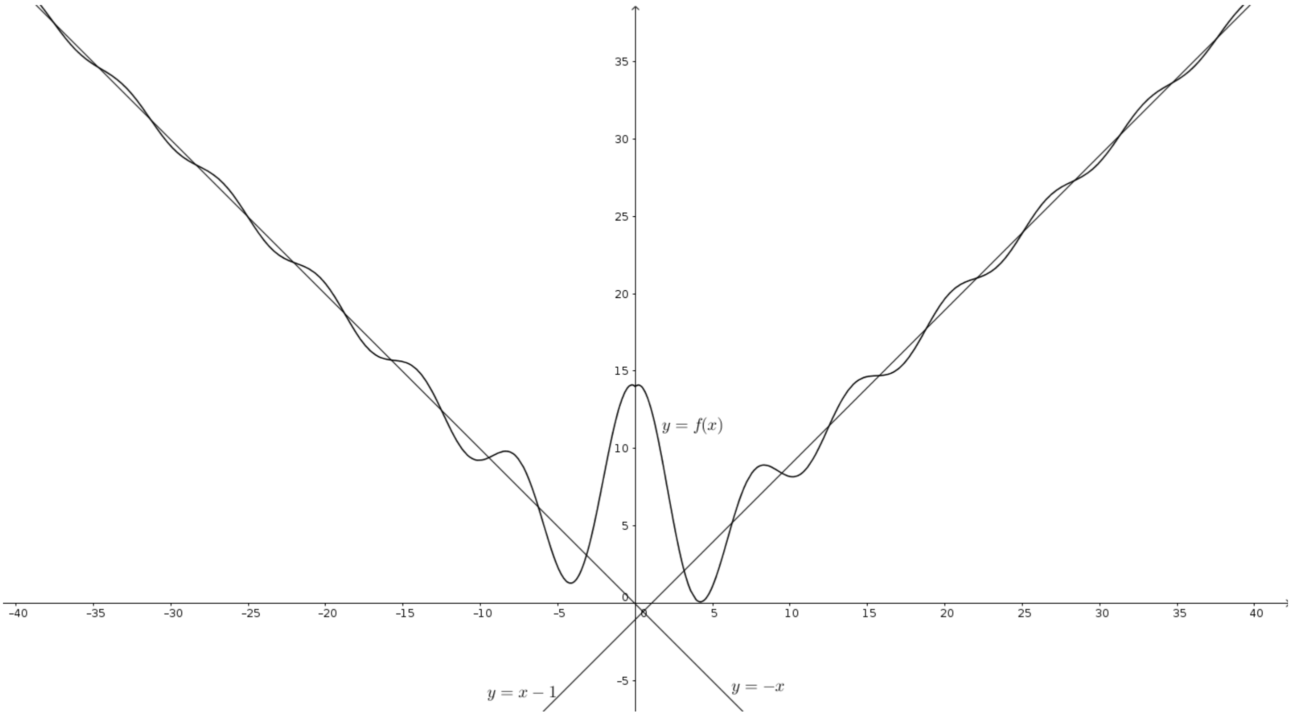
b) Interprétation graphique

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]A;+\infty[$ telle qu'il existe une fonction affine $ax+b$ avec $a\neq0$ telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x)-(ax+b)=0$. Alors, la droite $y=ax+b$ est asymptote oblique à la courbe de f en $+\infty$.

Graphiquement, cela signifie que lorsque x devient très grand, la courbe de f se rapproche de la droite d'équation $y=ax+b$.

La situation est analogue en $-\infty$.

Exemple : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ ci-dessous.



La droite d'équation $y=x-1$ est asymptote oblique à la courbe de f en $+\infty$, la droite d'équation $y=-x$ est asymptote oblique à la courbe de f en $-\infty$.

III – Limite infinie d'une fonction en un réel

a) Limites à connaître

<u>Exemple 1 :</u> Soit f la fonction définie $]0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{x}$.
Voici un tableau de valeurs :

x	1	$0{,}1$	$0{,}01$	$0{,}001$	$0{,}0001$	10^{-8}	10^{-12}
$f(x)$	1	10	100	1000	10000	10^{8}	10^{12}

On peut remarquer que lorsque x devient de plus en plus proche de 0 (on dit que x tend vers 0) en restant positif, alors $f(x)$ devient de plus en plus grand (on dit que $f(x)$ a pour limite $+\infty$).
Ceci se note : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$.

<u>Exemple 2 :</u> Soit f la fonction définie $]-\infty;0[$ par $f(x)=\frac{1}{x}$.
Voici un tableau de valeurs :

x	-1	$-0{,}1$	$-0{,}01$	$-0{,}001$	$-0{,}0001$	-10^{-8}	-10^{-12}
$f(x)$	-1	-10	-100	-1000	-10000	-10^{8}	-10^{12}

On peut remarquer que lorsque x devient de plus en plus proche de 0 (on dit que x tend vers 0) en restant négatif, alors $f(x)$ devient de plus en plus petit (on dit que $f(x)$ a pour limite $-\infty$).
Ceci se note : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$.

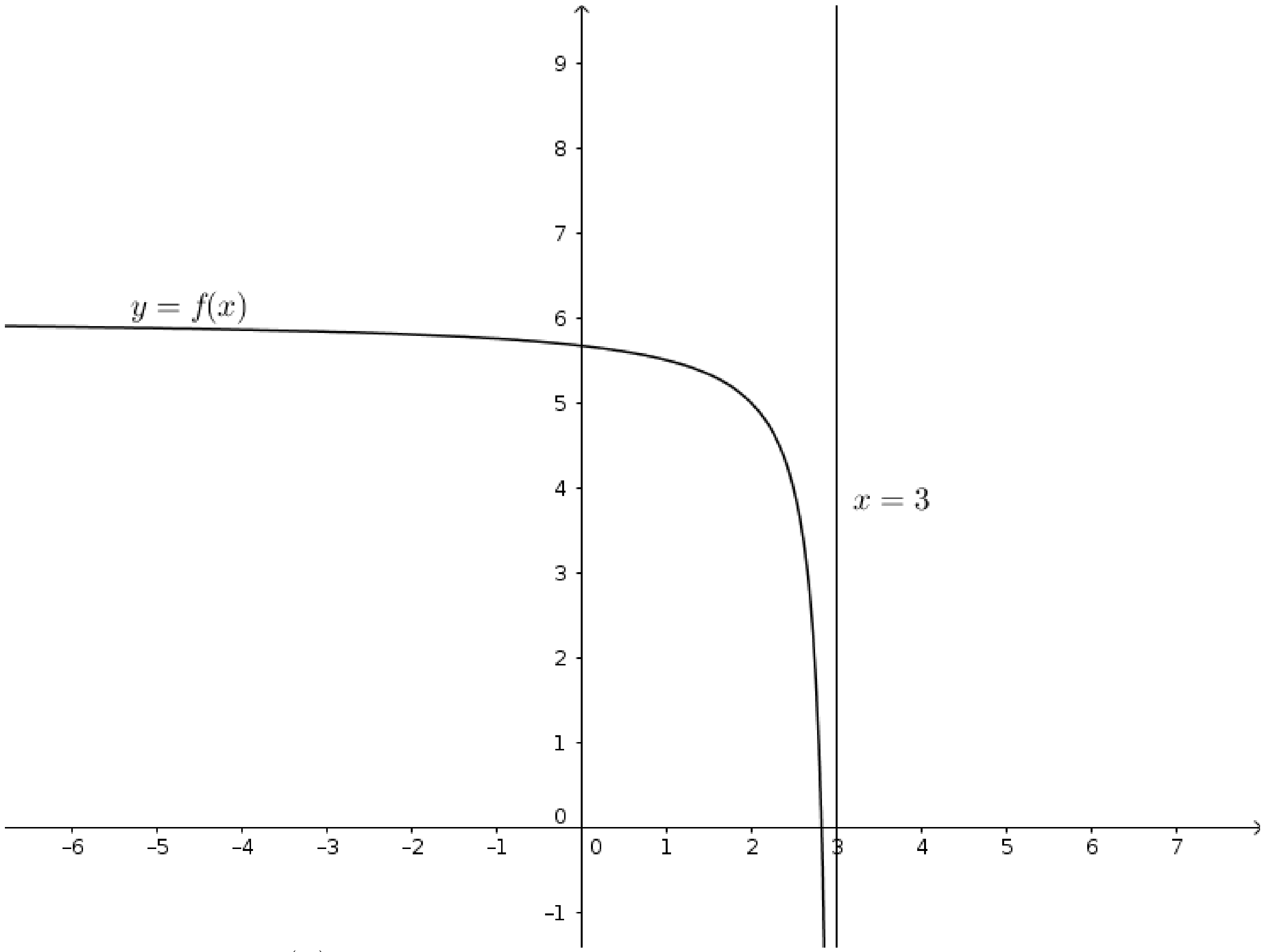
<u>Théorème :</u> Soit n un entier naturel non nul. On a alors :

- **Si n est pair $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^n}=+\infty$**
- **Si n est impair :**
  - **Si x reste positif, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^n}=+\infty$ – on note $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{1}{x^n}=+\infty$ ou $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x^n}=+\infty$.**
  - **Si x reste négatif, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^n}=-\infty$ – on note $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{1}{x^n}=-\infty$ ou $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x^n}=-\infty$.**

b) Interprétation graphique

Soient f une fonction et a un réel tels que $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$. Alors, on dit que la droite d'équation $x = a$ est <u>asymptote verticale</u> à la courbe de f.
Graphiquement, cela signifie que lorsque x devient très proche de a, la courbe de f se rapproche de la droite d'équation $x = a$.

<u>Exemple :</u> Soit f la fonction définie sur $]-\infty;3[$ ci-dessous.



On constate que $\lim_{x \to 3} f(x) = -\infty$, et donc la droite d'équation $x = 3$ est asymptote verticale à la courbe de f.

IV – Opérations sur les limites

a) Limite d'une somme

α désigne un réel, $+\infty$ ou $-\infty$.

f et g sont deux fonctions dont la limite en α est connue.

L et L' sont deux nombres réels.

Si $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x)=$	L	L	L	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
et $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x)=$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{x \to \alpha} (f(x)+g(x))=$	$L+L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I	$-\infty$

F.I signifie « Forme Indéterminée » : cela signifie que le tableau ne permet pas de conclure. En règne générale, il faut faire une transformation d'écriture.

<u>*Exemple :*</u> *Soient f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x$ et $g(x)=-3x$.*

On a alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)=-\infty$.

Si l'on cherche la limite de $f(x)+g(x)$ en $+\infty$, on est dans le cas d'une forme indéterminée.

Cependant, comme $f(x)+g(x)=-2x$, on a directement $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x)+g(x))=-\infty$.

b) Limite d'un produit

α désigne un réel, $+\infty$ ou $-\infty$.

f et g sont deux fonctions dont la limite en α est connue.

L et L' sont deux nombres réels.

Si $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x)=$	L	$L \neq 0$	$L \neq 0$
et $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x)=$	L'	$+\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{x \to \alpha} (f(x) \times g(x))=$	$L \times L'$	$+\infty$ si $L>0$ $-\infty$ si $L<0$	$-\infty$ si $L>0$ $+\infty$ si $L<0$

Si $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) =$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
et $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) =$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
alors $\lim\limits_{x \to \alpha} (f(x) \times g(x)) =$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I

F.I signifie « Forme Indéterminée » : cela signifie que le tableau ne permet pas de conclure. En règne générale, il faut faire une transformation d'écriture.

<u>*Exemple :*</u> *Soient f et g définies sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = x^3 + 2x$.*

On a alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ et comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x = +\infty$, le théorème relatif à la limite d'une somme donne $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

Si l'on cherche la limite de $f(x) \times g(x)$ en $+\infty$, on est dans le cas d'une forme indéterminée.

Cependant, comme sur $]0;+\infty[$ $f(x) \times g(x) = \frac{1}{x} \times (x^3 + 2x) = \frac{x^3}{x} + \frac{2x}{x} = x^2 + 2$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} 2 = 2$, donc le théorème relatif à la limite d'une somme donne $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) \times g(x)) = +\infty$.

<u>c) Limite d'un inverse</u>

α désigne un réel, $+\infty$ ou $-\infty$.
f est une fonction dont la limite en α est connue. L est un nombre réel.

Si $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) =$	$L \neq 0$	$\pm\infty$	0 avec $f(x) > 0$	0 avec $f(x) < 0$
alors $\lim\limits_{x \to \alpha} \frac{1}{f(x)} =$	$\frac{1}{L}$	0	$+\infty$	$-\infty$

d) Limite d'une fonction rationnelle à l'infini

Exemple : *Cherchons* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3-2x^2+1}{4x^4-5x+1}$.

Si on cherche la limite en $+\infty$ *du numérateur (* x^3-2x^2+1 *), on a une forme indéterminée puisque* $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3=+\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} -2x^2=-\infty$. *Au dénominateur, on a le même problème.*

On peut montrer (en factorisant le numérateur par x^3 *et le dénominateur par* x^4 *) que* $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3-2x^2+1=+\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} 4x^4-5x+1=+\infty$.

Cependant, on a encore une forme indéterminée (« $\frac{+\infty}{+\infty}$ *»).*

Une méthode consiste à factoriser le numérateur par le monôme de plus haut degré (ici, x^3 *) ainsi que le dénominateur par le monôme de plus haut degré (ici,* x^4 *) :*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3-2x^2+1}{4x^4-5x+1}=\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3\left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^4\left(4-\frac{5}{x^3}+\frac{1}{x^4}\right)}=\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}\times\frac{1}{4}=0\ .$$

On peut généraliser, et en déduire ce théorème :

<u>Théorème :</u> La limite en $+\infty$ ou $-\infty$ d'une fonction rationnelle est égale à la limite du quotient formé du monôme de plus haut degré du numérateur divisé par le monôme de plus haut degré du dénominateur.

<u>Remarque :</u> Ce théorème ne fonctionne que pour les limites en $+\infty$ ou $-\infty$!

Exemple : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{7x^5+8x^2-4x+1}{8x^5-4x^2+8}=\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{7x^5}{8x^5}=\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{7}{8}=\dfrac{7}{8}$.

f) Limite d’un quotient

Les théorèmes relatifs au produit de deux fonctions et d’un inverse permettent de déduire la limite d’un quotient de deux fonctions.

α désigne un réel, $+\infty$ ou $-\infty$.
f et g sont deux fonctions dont la limite en α est connue.

L et L' sont deux nombres réels.

Si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=$	L	L	$L>0$	$L>0$	$L<0$
et $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=$	$L'\neq 0$	$\pm\infty$	0 avec $g(x)>0$	0 avec $g(x)<0$	0 avec $g(x)>0$
alors $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)}=$	$\dfrac{L}{L'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$

Si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=$	$L<0$	0	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$
et $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=$	0 avec $g(x)<0$	0	$\pm\infty$	L'	L'
alors $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)}=$	$+\infty$	F.I	F.I	$+\infty$ si $L'>0$ $-\infty$ si $L'<0$	$-\infty$ si $L'>0$ $+\infty$ si $L'<0$

Chapitre 4 – Fonctions logarithme népérien, exponentielle, cosinus et sinus

I – Fonction logarithme népérien

a) Définition de la fonction logarithme népérien

Dans le tableau des dérivées, on peut remarquer qu'aucune fonction n'a pour dérivée la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{x}$.

C'est pourquoi on définit une nouvelle fonction, la fonction logarithme népérien (du nom de Neper, mathématicien écossais qui étudia cette fonction) :

<u>Définition :</u> La fonction logarithme népérien, notée $\ln$, est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ qui s'annule en 1 et dont la dérivée sur $]0;+\infty[$ est la fonction inverse.

<u>Remarque :</u> On admettra l'existence et l'unicité de cette fonction.

b) Propriétés analytiques

Il découle de cette définition que :

- **la fonction $\ln$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que pour tout $x\in]0;+\infty[$, $\ln'(x)=\frac{1}{x}$; comme sur $]0;+\infty[$ $\ln'(x)=\frac{1}{x}>0$, la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.**
- **$\ln(1)=0$.**

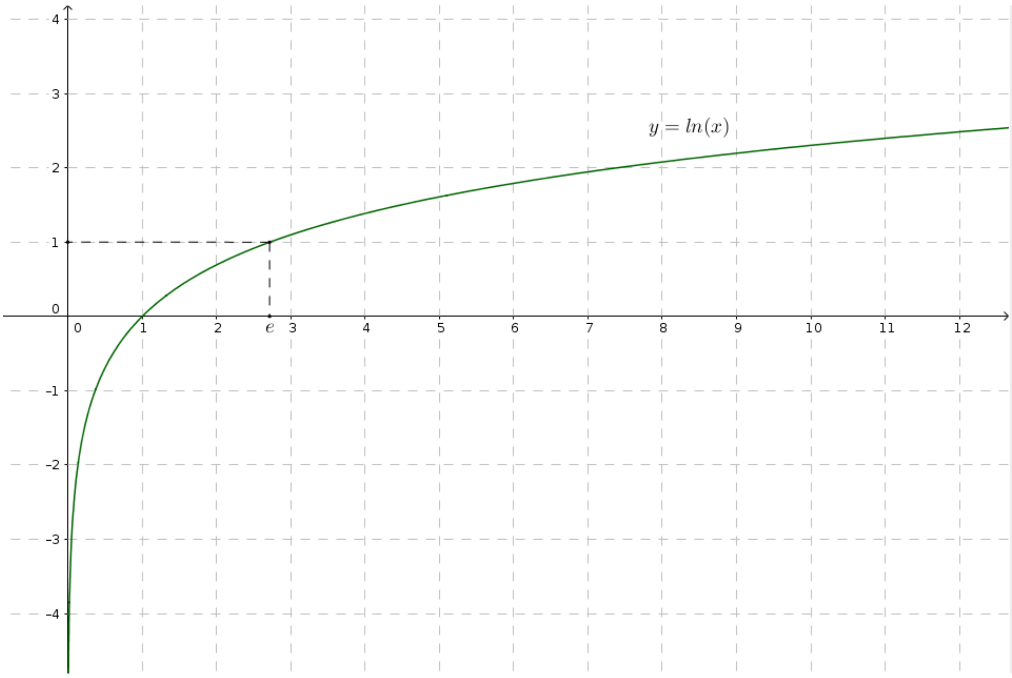
On déduit de ces deux points le tableau de variation de la fonction $\ln$:

x	0		1		$+\infty$
$\ln'(x)$	$\|\|$	$+$		$+$	
$\ln$	$\|\|$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	

On a donc ce tableau de signes :

x	0 $\quad 1 \quad$ $+\infty$
$\ln(x)$	$\|\|$ $\quad - \quad 0 \quad +$

c) Représentation graphique



On peut remarquer que :

- La droite $x=0$ est asymptote verticale à la courbe de la fonction $\ln$. On en déduit donc que $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$.
- De même, $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$.

Il existe une seule valeur $x \in]0;+\infty[$ telle que $\ln(x)=1$. Cette valeur est notée e .

On a donc $\mathbf{\ln(e)=1}$; de plus, $\mathbf{e \approx 2{,}718281828459}$. Pour résumer :

x	0		1		e		$+\infty$
$\ln'(x)$	$\|\|$	$+$		$+$		$+$	
$\ln$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

d) Dérivée d'une fonction définie avec un logarithme népérien

Théorème : **Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I telle que pour tout $x\in I$, $u(x)>0$. Alors la fonction $f(x)=\ln(u(x))$ est définie et dérivable sur I et pour tout $x\in I$, $f'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$.**

Exemple : *Soit f la fonction définie par $f(x)=ln(x^2+1)$.*

Comme $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2+1=+\infty$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$.

f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ puisque pour tout $x\in\mathbb{R}$ $x^2+1>0$.

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=ln(u(x))$ avec $u(x)=x^2+1$ donc comme $u'(x)=2x$,

$f'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}=\dfrac{2x}{x^2+1}$. On a donc comme variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

En effet, $f(0)=ln(0^2+1)=ln(1)=0$.

e) Propriétés algébriques

Propriété essentielle : **Pour tout $a>0$ et pour tout $b>0$, on a $\ln(ab)=\ln(a)+\ln(b)$.**

Exemples : *On sait que $ln(2)\approx 0{,}693$ et $ln(3)\approx 1{,}099$. On en déduit que*

- $ln(6)=ln(2\times 3)=ln(2)+ln(3)\approx 0{,}693+1{,}099=1{,}792$
- $ln(8)=ln(2\times 2\times 2)=ln(2)+ln(2)+ln(2)\approx 0{,}693+0{,}693+0{,}693=2{,}079$

Conséquences : **Pour tout $a>0$, pour tout $b>0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$,**

- $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)$
- $\ln(a^n)=n\ln(a)$
- $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right)=-\ln(a)$
- $\ln(\sqrt{a})=\dfrac{1}{2}\ln(a)$
- $\ln(\mathrm{e}^n)=n$

<u>Exemples :</u> On sait que $ln(2) \approx 0{,}693$ *et* $ln(3) \approx 1{,}099$.

On en déduit que

- $ln(1024) = ln(2^{10}) = 10\, ln(2) \approx 10 \times 0{,}693 = 6{,}93$
- $ln\left(\frac{3}{2}\right) = ln(3) - ln(2) \approx 1{,}099 - 0{,}693 = 0{,}406$
- $ln\left(\frac{1}{6561}\right) = -ln(6561) = -ln(3^8) = -8\, ln(3) \approx -8 \times 1{,}099 = -8{,}792$
- $ln(\sqrt{2}) = \frac{1}{2} ln(2) = \frac{1}{2} \times 0{,}693 = 0{,}3465$
- $ln(e^8) = 8$

<u>f) Comparaison</u>

On admet les résultats suivants :

Pour tout entier naturel n non nul, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) x^n = 0$.

II – Fonction exponentielle

<u>a) Définition</u>

<u>Définition :</u> Soit $b \in \mathbb{R}$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, comme la fonction $\ln$ est strictement croissante et dérivable sur $]0;+\infty[$ et que $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$, on en déduit que l'équation $\ln(x) = b$ possède une unique solution $a \in]0;+\infty[$. On a donc $\ln(a) = b$.

a est appelé <u>exponentielle</u> de b . On note $a = \exp(b)$ ou $a = e^b$.

On en déduit que la fonction $\exp$ est définie sur $\mathbb{R}$, et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$.

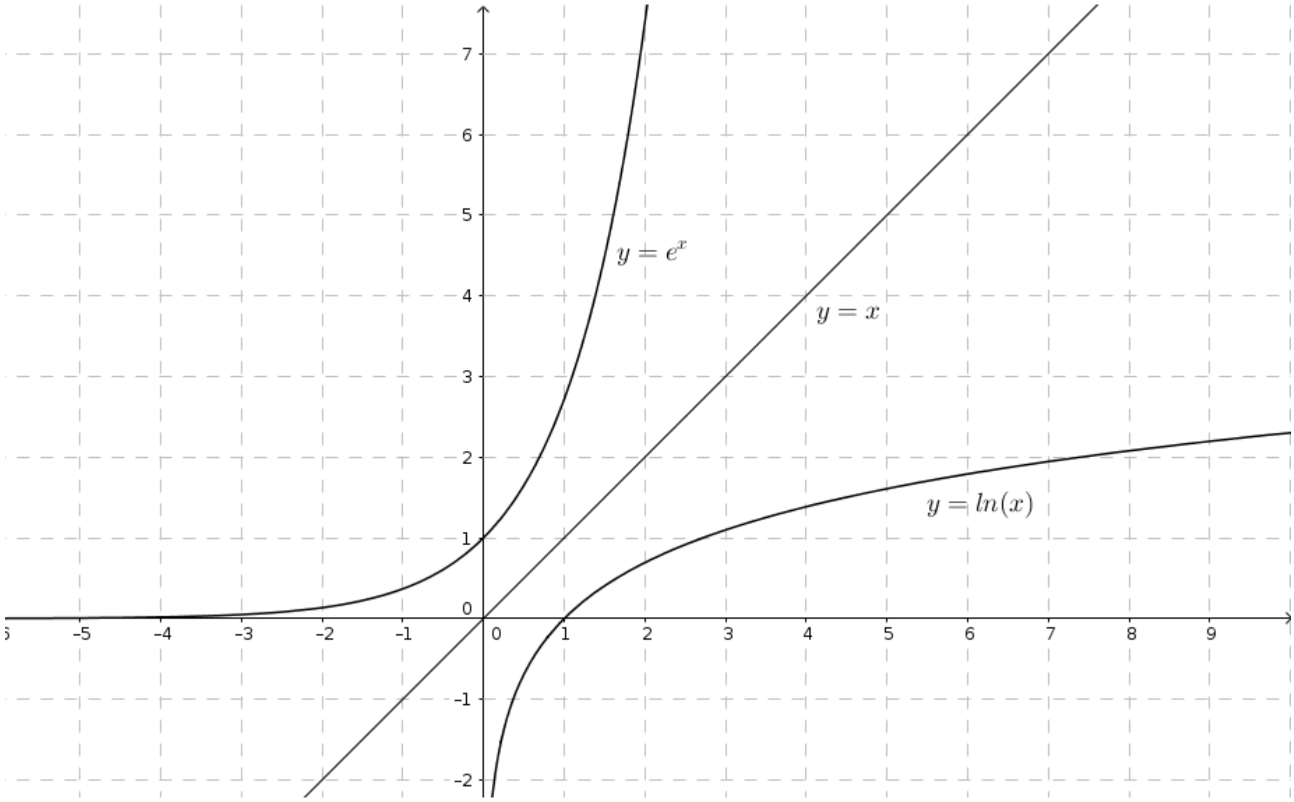
<u>Théorème :</u> Pour tout $y > 0$, $x = \ln(y) \Leftrightarrow y = e^x$.

Ceci équivaut à dire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(e^x) = x$, et pour tout $x > 0$, $e^{\ln}(x) = x$.

On a donc $e^0 = 1$ et $e^1 = e$.

b) Représentation graphique

Les fonctions ln et exp étant réciproques l'une de l'autre, leurs courbes sont symétriques dans un repère orthonormé par rapport à la droite $y=x$.



c) Propriétés analytiques

- On peut remarquer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathbf{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathbf{e}^x = 0$.
- On admet que exp est dérivable sur $\mathbb{R}$; pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \ln(\exp(x))$, on a donc $f(x) = x$. En dérivant on a donc $f'(x) = \frac{\exp'(x)}{\exp(x)}$; or $f'(x) = 1$ donc $\frac{\exp'(x)}{\exp(x)} = 1 \Leftrightarrow \exp'(x) = \exp(x)$. **Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \mathbf{e}^x$; exp est sa propre dérivée.**
- Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \mathrm{e}^x > 0$, on en déduit que **la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$** .

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$\exp'(x)$	+
exp	0 ↗ $+\infty$

d) Dérivée d'une fonction définie avec une exponentielle

Théorème : **Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Alors la fonction $f(x)=e^{u(x)}$ est définie et dérivable sur I et pour tout $x\in I$, $f'(x)=u'(x)e^{u(x)}$.**

Exemple : *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{-x^2+3}$.*

Comme $\lim\limits_{x\to\pm\infty} -x^2+3=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=e^{u(x)}$ avec $u(x)=-x^2+3$ donc comme $u'(x)=-2x$, $f'(x)=u'(x)e^{u(x)}=-2xe^{-x^2+3}$. On a donc comme variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	e^3	$\searrow$	0

En effet, $f(0)=e^{-0^2+3}=e^3$

e) Propriétés algébriques

Propriété essentielle : **Pour tout $a\in\mathbb{R}$, pour tout $b\in\mathbb{R}$, on a $e^{a+b}=e^a e^b$.**

Conséquences : **Pour tout $a\in\mathbb{R}$, pour tout $b\in\mathbb{R}$,**

- $e^{a-b}=\dfrac{e^a}{e^b}$
- $e^{-a}=\dfrac{1}{e^a}$
- **Pour tout entier relatif n, $e^{na}=(e^a)^n$.**

f) Comparaison

On admet les résultats suivants :

Pour tout entier naturel n non nul, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^n}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x x^n=0$.

III – Fonctions cosinus et sinus

<u>a) Définitions</u>

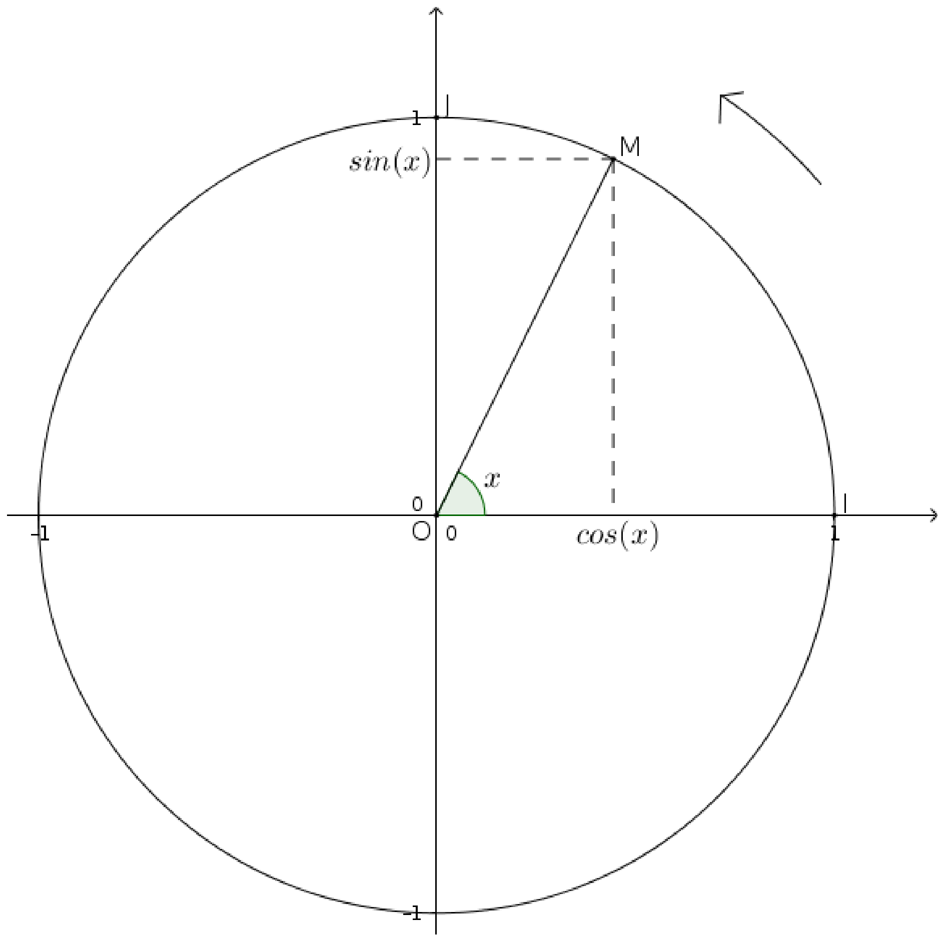
Dans un repère orthonormé $(O;I,J)$, On considère le cercle C de centre O et de rayon 1, orienté dans le sens direct (sens inverse des aiguilles d'une montre.

Ce cercle est appelé cercle trigonométrique.

À chaque réel x, on associe l'unique point M du cercle tel que l'angle orienté $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM})$ mesure x radians.

On a donc $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM})=x+2k\pi$, avec $k\in\mathbb{Z}$ (k est un entier relatif).

- **La fonction cosinus, notée $\cos$, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui à tout réel x associe $\cos(x)$, abscisse du point M.**
- **La fonction sinus, notée $\sin$, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui à tout réel x associe $\sin(x)$, abscisse du point M.**

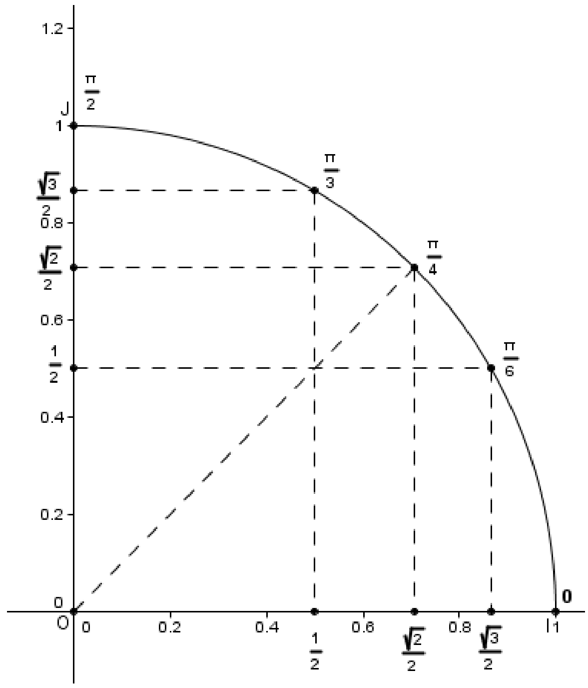


b) Propriétés

Pour tout réel x et tout entier relatif k ,

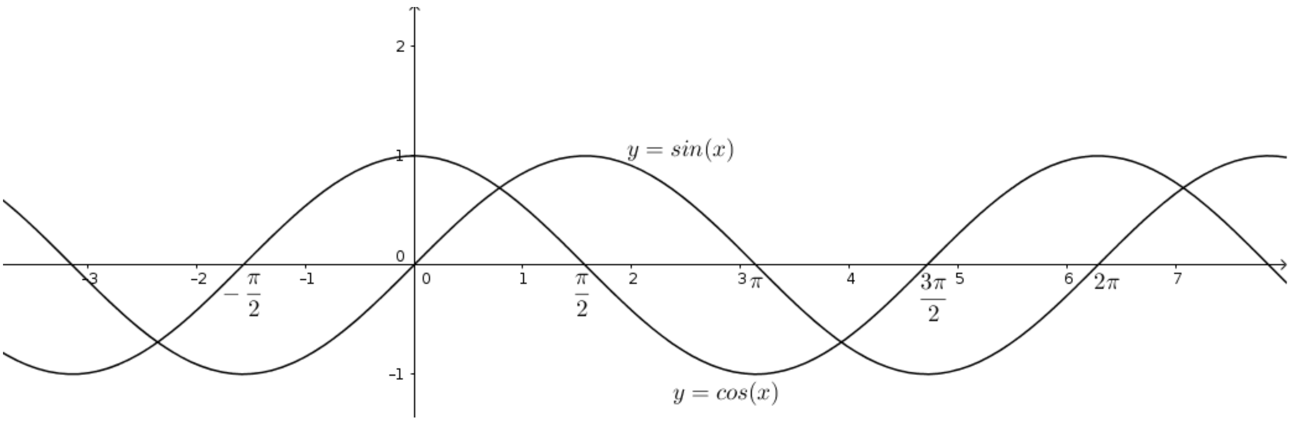
- $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$
- $\cos(x+2k\pi)=\cos(x)$ et $\sin(x+2k\pi)=\sin(x)$
- $(\cos(x))^2+(\sin(x))^2=1$

c) Valeurs usuelles



Angle $\widehat{ION}$	0°	30°	45°	60°	90°
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

d) Représentation graphique des fonctions cosinus et sinus



e) Dérivées des fonctions cosinus et sinus

Théorème :

- **La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos'(x) = -\sin(x)$.**
- **La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin'(x) = \cos(x)$.**

f) Dérivée d'une fonction définie avec un cosinus ou un sinus

Théorème : Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

- **La fonction f définie sur I par $f(x) = \cos(u(x))$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $f'(x) = u'(x) \times (-\sin(u(x)))$.**
- **La fonction f définie sur I par $f(x) = \sin(u(x))$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $f'(x) = u'(x) \times \cos(u(x))$.**

Exemple : La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = sin(4x+3)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = sin(u(x))$ avec $u(x) = 4x+3$. On a $u'(x) = 4$ et donc $f'(x) = u'(x) cos(u(x)) = 4 cos(4x+3)$.

Chapitre 5 – Calcul intégral

I – Primitives

a) Définition et premières propriétés

<u>Définition :</u> Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On appelle primitive de f toute fonction F dérivable sur I telle que, pour tout $x \in I$, $F'(x)=f(x)$.

<u>Exemple :</u> Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3+5x-8$.

La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{5}{2}x^2-8x+5$ est une primitive de f puisque F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x)=\frac{3x^3}{3}+\frac{5}{2}\times 2x-8\times 1+0=\frac{x^3}{3}+5x-8=f(x)$.

<u>Propriétés :</u>

- Toute fonction dérivable sur un intervalle I admet une primitive sur I.
- Deux primitives diffèrent d'une constante, c'est-à-dire que si F est une primitive de f sur un intervalle I, alors pour tout réel C, la fonction G définie sur I par $G(x)=F(x)+C$ est aussi une primitive de f (puisque sa dérivée sur I est $G'(x)=F'(x)+0=f(x)$).

<u>Conséquences :</u> On déduit des propriétés ci-dessus que :

- Toute fonction dérivable sur un intervalle I admet une infinité de primitives sur I.
- Soient f une fonction dérivable sur un intervalle I, $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.

  Alors il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0)=y_0$.

<u>Exemple :</u> Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^5$.

Cherchons la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(1)=2$.

f étant dérivable sur $\mathbb{R}$, ses primitives sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $F(x)=\frac{x^6}{6}+C$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Or $F(1)=2$ donc $\frac{1^6}{6}+C=2 \Leftrightarrow \frac{1}{6}+C=2 \Leftrightarrow C=\frac{12}{6}-\frac{1}{6} \Leftrightarrow C=\frac{11}{6}$.

La primitive cherchée est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=\frac{x^6}{6}+\frac{11}{6}$.

b) Primitives de fonctions usuelles

À partir du tableau donnant les dérivées des fonctions usuelles, on peut en déduire ce tableau de primitives. Le nombre C est une constante réelle quelconque.

f **est définie par**	**sur**	**Les primitives F de f sont définies par**
$f(x)=a$ (a est une constante)	$\mathbb{R}$	$F(x)=ax+C$
$f(x)=x$	$\mathbb{R}$	$F(x)=\frac{x^2}{2}+C$
$f(x)=x^n$ (n est un entier relatif non nul différent de -1)	• $\mathbb{R}$ si $n>0$ • $]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$ si $n<0$ et $n\neq-1$	$F(x)=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$	$F(x)=\ln(x)+C$
$f(x)=\mathrm{e}^x$	$\mathbb{R}$	$F(x)=\mathrm{e}^x+C$
$f(x)=\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$F(x)=\sin(x)+C$
$f(x)=\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$F(x)=-\cos(x)+C$

c) Opérations algébriques

Théorème :

- **Si F est une primitive d'une fonction f sur un intervalle I et si G est une primitive d'une fonction g sur I, alors $F+G$ est une primitive de la fonction $f+g$ sur I.**
- **Si F est une primitive d'une fonction f sur un intervalle I, et si $a\in\mathbb{R}$, alors aF est une primitive de la fonction af sur I.**

Exemple : *Cherchons la primitive sur $]0;+\infty[$ s'annulant en $x=1$ de la fonction $f(x)=3x^2+5+\frac{1}{x}-\frac{5}{x^3}$.*

Pour tout $x>0$, $f(x)=3x^2+5+\frac{1}{x}-5\times x^{-3}$.

D'après les primitives usuelles et le théorème, une primitive de f sur $]0;+\infty[$ est :

$$F(x)=3\times\frac{x^{2+1}}{2+1}+5x+ln(x)-5\times\frac{x^{-3+1}}{-3+1}+C=x^3+5x+ln(x)+\frac{5}{2}x^{-2}+C=x^3+5x+ln(x)+\frac{5}{2x^2}+C\ .$$

Or $F(1)=0$ donc $1^3+5\times1+ln(1)+\frac{5}{2\times1^2}+C=0\Leftrightarrow1+5+0+\frac{5}{2}+C=0\Leftrightarrow C=-\frac{17}{2}$.

La fonction cherchée sur $]0;+\infty[$ est $F(x)=x^3+5x+ln(x)+\frac{5}{2x^2}-\frac{17}{2}$.

d) Composition de fonctions et intégration

Théorème : Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I .

Alors, la fonction f définie sur I par $f(x)=u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$ admet pour primitives sur I les fonctions $F(x)=\mathrm{e}^{u(x)}+C$ avec $C\in\mathbb{R}$.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x e^{(x^2)}$.

Posons $u(x)=x^2$. u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $u'(x)=2x$.

On a donc pour tout $x\in\mathbb{R}$ $f(x)=\frac{1}{2}u'(x)e^{u(x)}$, donc f admet pour primitives $F(x)=\frac{1}{2}e^{(x^2)}+C$ avec $C\in\mathbb{R}$.

Théorème : Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I telle que, pour tout $x\in I$, $u(x)>0$.

Alors, la fonction f définie sur I par $f(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$ admet pour primitives sur I les fonctions $F(x)=\ln(u(x))+C$ avec $C\in\mathbb{R}$.

Exemple : Soit f fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{x\ln(x)}$.

Pour tout $x>1$, $f(x)=\frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}$. En posant $u(x)=\ln(x)$, on a $u'(x)=\frac{1}{x}$ et $f(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$.

Comme pour tout $x>1$ $u(x)>0$, f admet pour primitives sur $]1;+\infty[$ $F(x)=\ln(u(x))+C=\ln(\ln(x))+C$ avec $C\in\mathbb{R}$.

Théorème : Soient $\omega\neq 0$ et $\phi\neq 0$ deux réels.

- **La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\cos(\omega x+\phi)$ admet pour primitives sur I les fonctions $F(x)=\frac{1}{\omega}\sin(\omega x+\phi)+C$ avec $C\in\mathbb{R}$.**
- **La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sin(\omega x+\phi)$ admet pour primitives sur I les fonctions $F(x)=-\frac{1}{\omega}\sin(\omega x+\psi)+C$ avec $C\in\mathbb{R}$.**

Exemple : La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\cos(3x+2)$ admet pour primitives sur $\mathbb{R}$ les fonctions $F(x)=\frac{1}{3}\sin(3x+2)$.

II – Intégrale d'une fonction dérivable sur un intervalle

a) Définition de l'intégrale d'une fonction sur un intervalle

Remarque : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Elle possède donc une infinité de primitives sur I, différent toutes entre elles d'une constante.

Soient F et G deux primitives de f sur I, il existe donc $C\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $x\in I$, $F(x)=G(x)+C$.

On remarque que pour tous $a\in I$ et $b\in I$, $F(b)-F(a)=G(b)+C-(G(a)+C)=G(b)-G(a)$.

La valeur de la différence $F(b)-F(a)$ ne dépend donc pas du choix de la primitive.

Définition : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et a et b deux réels de I.

L'intégrale de a à b de f, notée $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, est le nombre $F(b)-F(a)$ où F est une primitive de f sur I : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$.

Remarques et conséquences :

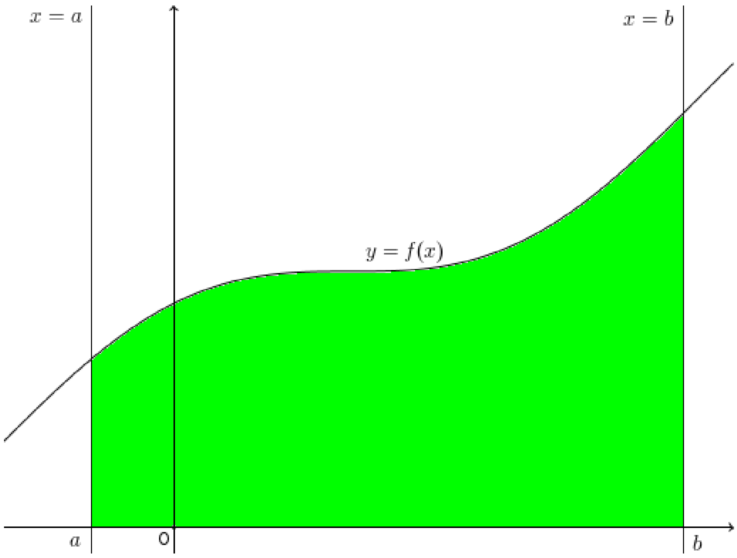
- Pour tous a et b de I, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x=0$.
- Pour tous a, b et c de I, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ (relation de Chasles)
- Le calcul de la différence $F(b)-F(a)$ se note aussi $[F(x)]_a^b$.

  On a donc : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$.
- Pour toutes fonctions f et g dérivables sur I, pour tous a et b de I et tous $\alpha\in\mathbb{R}$ et $\beta\in\mathbb{R}$, $\int_a^b \alpha f(x)+\beta g(x)\,\mathrm{d}x=\alpha\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\beta\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

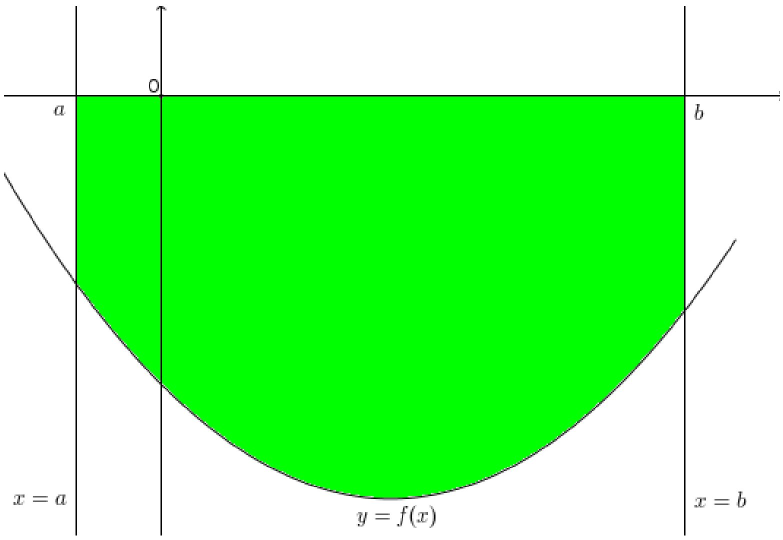
Exemple : Calculons $I=\int_{-2}^3 e^x+5x-4x^2\,\mathrm{d}x$. *La fonction* $f(x)=e^x+5x-4x^2$ *admet pour primitive sur* $[-2;3]$ $F(x)=e^x+\frac{5x^2}{2}-\frac{4x^3}{3}$. *On a donc* $I=\int_{-2}^3 e^x+5x-4x^2\,\mathrm{d}x=[e^x+\frac{5x^2}{2}-\frac{4x^3}{3}]_{-2}^3$ *donc* $I=e^3+\frac{5\times3^2}{2}-\frac{4\times3^3}{3}-(e^{-2}+\frac{5\times(-2)^2}{2}-\frac{4\times(-2)^3}{3})=e^3-e^{-2}-\frac{205}{6}$.

b) Interprétation géométrique de l'intégrale d'une fonction sur un intervalle

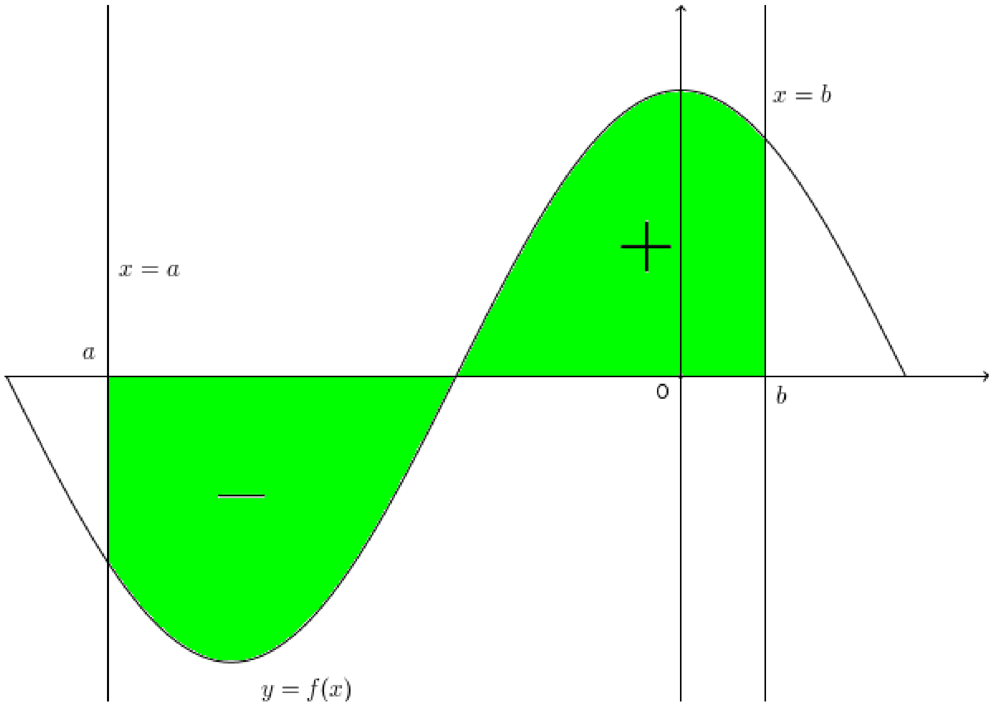
- **Soit f une fonction dérivable et *positive* sur un intervalle $[a;b]$.**
  L'aire A de la partie du plan constituée de l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $a \leqslant x \leqslant b$ et $0 \leqslant y \leqslant f(x)$ est $A=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.



- **Soit f une fonction dérivable et *négative* sur un intervalle $[a;b]$.**
  L'aire A de la partie du plan constituée de l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $a \leqslant x \leqslant b$ et $f(x) \leqslant y \leqslant 0$ est $A=-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.



- **Dans le cas général, pour une fonction f dérivable sur un intervalle $[a;b]$, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ représente l'aire *algébrique* de la partie du plan entre les droites $x=a$ et $x=b$, l'axe de abscisses et la courbe de f. Lorsque les images de f sont négatives, l'aire est comptée négativement, et lorsque les images de f sont positives, l'aire est comptée positivement.**



<u>c) Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle</u>

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a;b]$. La *valeur moyenne* de la fonction f sur $[a;b]$ est égale à $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Chapitre 6 – Équations différentielles

I – Introduction

On appelle équation différentielle une équation où l'inconnue n'est pas un nombre, mais une fonction, et cette équation établit une relation entre la fonction inconnue et ses dérivées.

En électricité, en mécanique, en biologie,…, de nombreux phénomènes continus satisfaisant à une loi d'évolution et à une condition initiale sont décrits par une fonction f plusieurs fois dérivable sur un intervalle I et définie comme solution d'une équation où interviennent une ou plusieurs de ses dérivées.

<u>Exemple :</u> On considère l'équation différentielle $y'+5y=9t$, où y est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Ici, l'inconnue est la fonction y de variable t (on peut donc noter l'équation aussi $y'(t)+5y(t)=9t$), on cherche donc, si elles existent, les fonctions y solutions de l'équation.

On peut remarquer que la fonction $f(t)=\frac{9}{5}t-\frac{9}{25}$ définie sur $\mathbb{R}$ est solution de l'équation ; en effet, pour tout $t\in\mathbb{R}$, $f'(t)=\frac{9}{5}$ et $f'(t)+5f(t)=\frac{9}{5}+5\left(\frac{9}{5}t-\frac{9}{25}\right)=\frac{9}{5}+9t-\frac{9}{5}=9t$.

Cependant, il y a-t-il d'autres solutions ?

Le but de ce chapitre est de résoudre certains types d'équations différentielles.

II – Équations différentielles et calcul intégral

Dans certains cas, l'équation différentielle fait apparaître une dérivée de la fonction y, mais pas la fonction y. Le chapitre 5 permet de résoudre l'équation.

<u>Exemple 1 :</u> On considère l'équation différentielle $y'=e^t+5t-3$, où y est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Ici, pour trouver les solutions y, il suffit de chercher les primitives sur $\mathbb{R}$ de y', donc de la fonction $f(t)=e^t+5t-3$.

On en déduit que les solutions de l'équation sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $y(t)=e^t+\frac{5}{2}t^2-3t+C$, avec $C\in\mathbb{R}$.

<u>Exemple 2 :</u> On considère l'équation différentielle $y''=-\frac{1}{t^2}+4t^3+2$, où y est une fonction de la variable réelle t , définie et deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$.

Ici, pour trouver les solutions y , il faut dans un premier temps trouver les primitives y' sur $]0;+\infty[$ de y'' , puis les primitives de y de y' sur $]0;+\infty[$.

- *Les primitives de $f(t)=-\frac{1}{t^2}+4t^3+2$ sur $]0;+\infty[$ sont les fonctions $F(x)=\frac{1}{t}+t^4+2t+C$, avec $C\in\mathbb{R}$.*
- *Les primitives de $g(t)=\frac{1}{t}+t^4+2t+C$ sur $]0;+\infty[$ sont les fonctions $G(t)=ln(t)+\frac{t^5}{5}+t^2+Ct+K$, avec $C\in\mathbb{R}$ et $K\in\mathbb{R}$.*

On en déduit que les solutions de l'équation sur $]0;+\infty[$ sont les fonctions $y(t)=ln(t)+\frac{t^5}{5}+t^2+Ct+K$, avec $C\in\mathbb{R}$ et $K\in\mathbb{R}$.

III – Équations différentielles linéaires du premier ordre

<u>a) Définitions et exemple</u>

<u>Définitions :</u> On appelle *équation différentielle linéaire du premier ordre* une équation d'inconnue y qui peut s'écrire sous la forme $ay'+by=c(t)$, où c est une fonction de la variable t dérivable sur un intervalle I , $a\neq 0$, $b\in\mathbb{R}$ et où y' est la dérivée de la fonction y .

On appelle *équation différentielle sans second membre associée* l'équation où l'on remplace $c(t)$ par 0.

<u>Exemple :</u> L'équation $5y'-8y=ln(t)$ avec $I=[0;+\infty[$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre. Son équation différentielle sans second membre associée est $5y'-8y=0$.

<u>b) Méthode de résolution</u>

<u>Théorème (résolution de l'équation sans second membre) :</u> L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'+\alpha y=0$, avec $\alpha\in\mathbb{R}$, est l'ensemble des fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par $y(t)=C\,\mathrm{e}^{-\alpha t}$ où C est une constante réelle quelconque.

<u>Exemple :</u> Résolvons l'équation différentielle $5y'-8y=0$. Cette équation équivaut à $y'-\frac{8}{5}y=0$. Les solutions sont donc les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par $y(t)=Ce^{-\frac{8}{5}t}$, avec $C\in\mathbb{R}$.

<u>Théorème (résolution de l'équation avec second membre) :</u> L'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) $a\,y'+b\,y=c(t)$ est l'ensemble des fonctions y définies par $y(t)=C\,\mathrm{e}^{-\frac{b}{a}t}+g(t)$, où C est une constante réelle quelconque et où la fonction g est une solution particulière de (E).

<u>Remarque :</u> La solution particulière g est souvent donnée, ou des indications permettent de la trouver.

<u>Exemple :</u> Considérons l'équation différentielle (E) $y'+2y=4t-1$.

- *Vérifions que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t)=2t-\frac{3}{2}$ est une solution particulière de (E).*

  Pour tout $t\in\mathbb{R}$, $g'(t)=2$ et donc $g'(t)+2g(t)=2+2\left(2t-\frac{3}{2}\right)=2+4t-3=4t-1$.

  g est bien solution particulière de (E).
- *Les solutions de l'équation sans second membre $y'+2y=0$ sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par $y(t)=Ce^{-2t}$ avec $C\in\mathbb{R}$.*

Les solutions de (E) sont donc les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par $y(t)=Ce^{-2}t+2t-\frac{3}{2}$, avec $C\in\mathbb{R}$.

IV – Équations différentielles du second ordre à coefficients réels constants

<u>a) Définitions et exemple</u>

<u>Définitions :</u> On appelle *équation différentielle du second ordre à coefficients réels constants* une équation d'inconnue y qui peut s'écrire sous la forme $a\,y''+b\,y'+c\,y=d(t)$, où d est une fonction de la variable t dérivable sur un intervalle I, $a\neq 0$, $b\in\mathbb{R}$, $c\in\mathbb{R}$ et où y'' et y' sont respectivement les dérivées seconde et première de la fonction y.

On appelle *équation différentielle sans second membre associée* l'équation où l'on remplace $d(t)$ par 0.

<u>Exemple :</u> L'équation $5y''+6y'-6y=\cos(t)$ est une équation différentielle du second ordre à coefficients réels constants. Son équation différentielle sans second membre est $5y''+6y'-6y=0$.

b) Méthode de résolution

Théorème (résolution de l’équation sans second membre) :

- **L’ensemble des solutions de l’équation différentielle $ay''+by'+cy=0$, avec $a\neq 0$, est l’ensemble des fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par $y(t)=C_1f_1(t)+C_2f_2(t)$ où C_1 et C_2 sont des constantes réelles quelconques.**
- **Les fonctions f_1 et f_2 sont déterminées à partir des solutions de l’équation caractéristique $ar^2+br+c=0$:**
  - **Si $\Delta>0$, l’équation caractéristique a deux solutions réelles r_1 et r_2 , et on a alors $f_1(t)=\mathrm{e}^{r_1t}$ et $f_2(t)=\mathrm{e}^{r_2t}$.**
  - **Si $\Delta=0$, l’équation caractéristique a une solution réelle r_0 , et on a alors $f_1(t)=\mathrm{e}^{r_0t}$ et $f_2(t)=t\,\mathrm{e}^{r_0t}$.**
  - **Si $\Delta<0$, l’équation caractéristique a deux solutions complexes. On a alors $f_1(t)=\cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}t\right)\mathrm{e}^{-\frac{b}{2a}t}$ et $f_2(t)=\sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}t\right)\mathrm{e}^{-\frac{b}{2a}t}$.**

Exemples :

- *Résolvons l’équation différentielle (E) $y''-5y+4y=0$.*

  L’équation caractéristique $r^2-5y+4=0$ a pour discriminant $\Delta=(-5)^2-4\times 1\times 4=9$.
  Les solutions sont donc $r_1=\frac{-(-5)+\sqrt{9}}{2\times 1}=4$ et $r_2=\frac{-(-5)-\sqrt{9}}{2\times 1}=1$.

  Les solutions de l’équation différentielle (E) sont donc les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par $y(t)=C_1e^{4t}+C_2e^t$ avec $C_1\in\mathbb{R}$ et $C_2\in\mathbb{R}$.
- *Résolvons l’équation différentielle (E) $y''+5y+4y=0$.*

  L’équation caractéristique $r^2+4y+4=0$ a pour discriminant $\Delta=4^2-4\times 1\times 4=0$.
  La solution est donc $r_0=\frac{-4}{2\times 1}=-1$.

  Les solutions de l’équation différentielle (E) sont donc les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par $y(t)=(C_1t+C_2)e^{-t}$ avec $C_1\in\mathbb{R}$ et $C_2\in\mathbb{R}$.
- *Résolvons l’équation différentielle (E) $5y''+8y+5y=0$.*

  L’équation caractéristique $5r^2+8y+5=0$ a pour discriminant $\Delta=8^2-4\times 5\times 5=-36$.

  On a alors $\frac{-b}{2a}=\frac{-8}{2\times 5}=-\frac{4}{5}$ et $\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{\sqrt{36}}{2\times 5}=\frac{3}{5}$.

  Les solutions de l’équation différentielle (E) sont donc les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par $y(t)=C_1\cos\left(\frac{3}{5}t\right)e^{-\frac{4}{5}t}+C_2\sin\left(\frac{3}{5}t\right)e^{-\frac{4}{5}t}$ avec $C_1\in\mathbb{R}$ et $C_2\in\mathbb{R}$.

<u>Théorème (résolution de l’équation avec second membre) :</u> L’ensemble des solutions de l’équation différentielle (E) $a\,y''+b\,y'+c\,y=d(t)$ s’obtient en ajoutant à l’ensemble des solutions de l’équation sans second membre $ay''+b\,y'+c\,y=0$ une solution particulière g de l’équation différentielle (E).

<u>Remarque :</u> La solution particulière g est souvent donnée, ou des indications permettent de la trouver.