Cours de mathématiques – Terminale STMG

Chapitre 1 – Information chiffrée

I – Proportions

<u>Illustration :</u> On sait que dans un lycée, il y a 368 filles et 450 garçons. On voudrait connaître le pourcentage d'élèves dans ce lycée qui sont des filles.

<u>Définition :</u> Une proportion (ou part) est le rapport du nombre d'éléments de la partie qui nous intéresse par le nombre total d'éléments.

<u>Exemple :</u> Dans ce lycée, il y a donc $368+450=818$ élèves. La proportion de filles parmi les élèves est donc $\frac{368}{818}\approx 0,45$. On peut donc dire que dans le lycée il y a environ 45 % de filles – et donc 55 % de garçons.

<u>Remarques :</u> Une proportion est toujours comprise en 0 (0 %) et 1 (100 %).

Calculer p % d'une quantité, c'est la multiplier par $\frac{p}{100}$.

II – Taux d'évolution

<u>a) Détermination d'un taux d'évolution</u>

<u>Illustration :</u> On sait qu'un article, qui coutait 28 €, coute maintenant 35 €. On cherche à savoir quel est son taux d'évolution, c'est-à-dire à quelle proportion (par rapport au prix de départ) correspond l'augmentation.

Dans ce cas, l'article a augmenté de $35-28=7$ €. On calcule la proportion : $\frac{7}{28}=0,25=25$ %.

Le prix a augmenté de 25 %.

<u>Définition :</u> Une quantité évolue d'une valeur initiale y_1 à une valeur finale y_2 .

Le taux d'évolution t de y_1 à y_2 est $t=\frac{y_2-y_1}{y_1}$.

Exemple : *Le nombre de naissances dans un pays est passé de 45 000 à 33 000. Le taux d'évolution est donc* $t=\frac{33000-45000}{45000}\approx-0{,}27$ *, soit une baisse de 27 % environ.*

Remarques :

- Si $t>0$, il s'agit d'une augmentation, si $t<0$, il s'agit d'une diminution.
- Un taux d'évolution peut dépasser 100 %.

b) Appliquer un taux d'évolution

Illustration : La température d'une pièce est de 28 °C. Elle augmente de 25 %, c'est-à-dire de $28\times\frac{25}{100}=7$ °C.

Elle est donc maintenant de $28+7=33$ °C.

On a finalement calculé $28+28\times\frac{25}{100}=28\times1+28\times\frac{25}{100}=28\times1+28\times\frac{25}{100}=28\times\left(1+\frac{25}{100}\right)$.

Propriété : Faire subir une évolution de taux t , c'est multiplier une quantité par le coefficient multiplicateur $1+t$.

Exemple : *Faire subir une évolution de taux* $t=-20\,\%$ *, c'est donc multiplier par* $1-\frac{20}{100}=0{,}8$.

III – Taux réciproque

Illustration : Pour les soldes, un prix a baissé de 30 %. On cherche quelle évolution lui faire subir pour revenir au prix initial.
Si $t\neq-1$ est l'évolution subie, le coefficient multiplicateur est $1+t$, on cherche donc l'évolution réciproque t' telle que les évolutions successives de taux t et t' équivalent à une évolution de taux 0, c'est-à-dire $(1+t)(1+t')=1\Leftrightarrow 1+t'=\frac{1}{1+t}$.

Propriété : Si une quantité subit une évolution de taux $t\neq-1$, l'évolution réciproque de taux t' vérifie $t'=\frac{1}{1+t}-1$.

Exemple : *Si une quantité subit une augmentation de 25 %, le taux* t' *de l'évolution réciproque est* $t'=\frac{1}{1+0{,}25}-1=\frac{1}{1{,}25}-1=-0{,}2=-20\,\%$.
Une diminution de 20 % compense une augmentation de 25 %.

IV – Indices

<u>Illustration :</u> En France, une nouvelle méthode de recensement a été mise en place en 2004.

Si on veut rapidement savoir dans quelle proportion évolue la population, on peut choisir 2004 comme année de référence, et lui attribuer « l'indice 100 » – c'est-à-dire faire comme si il y avait 100 habitants seulement en France en 2004. Par proportionnalité, l'indice en 2005 était de 100,8. On peut donc en conclure que la population française a augmenté de 0,8 %.

<u>Définition :</u> y_1 et y_2 sont deux valeurs d'une même grandeur.

Définir l'<u>indice base 100</u> de cette grandeur correspondant à y_1, c'est associer à y_1 la valeur $I_1=100$. Par proportionnalité, on calcule l'indice I_2 associe à y_2.

<u>Propriété :</u> On a donc $\frac{I_2}{I_1}=\frac{y_2}{y_1}$ donc $I_2=100\times\frac{y_2}{y_1}$.

<u>Exemple :</u> Le taux de natalité en France pour 1 000 habitants était de 18,70 en 1960 et de 12,83 en 2010. On choisit comme indice de base 100 le taux de natalité pour 1 000 habitants en 1960.

L'indice en 2010 est donc $100\times\frac{12{,}83}{18{,}70}\approx 68{,}6$.

V – Évolutions successives

<u>Illustration :</u> Une quantité peut subir plusieurs évolutions successives – par exemple une diminution de 50 %, puis une augmentation de 30 %, puis une diminution de 10 %. À chaque étape, la nouvelle quantité est égale à la quantité précédente multipliée par un coefficient multiplicatif de la forme $1+t$ où t est le taux d'évolution. On cherche le taux d'évolution global.

Si une quantité subit n évolutions de taux respectifs t_1, t_2, …, t_n, la quantité a été multipliée par $(1+t_1)(1+t_2)\ldots(1+t_n)$. Si T est le taux qui correspond à l'évolution globale, on a alors $1+T=(1+t_1)(1+t_2)\ldots(1+t_n)$.

<u>Propriété :</u> Si une quantité subit n évolutions de taux respectifs t_1, t_2, …, t_n, alors le taux <u>global</u> T vérifie $T=(1+t_1)(1+t_2)\ldots(1+t_n)-1$.

<u>Exemple :</u> Une quantité subit une augmentation de 10 %, une diminution de 20 %, une augmentation de 50 %.

Le taux global T est donc $T=\left(1+\frac{10}{100}\right)\left(1-\frac{20}{100}\right)\left(1+\frac{50}{100}\right)-1=1{,}1\times0{,}8\times1{,}5-1=0{,}32=32\,\%$.

L'évolution globale est une augmentation de 32 %.
Une augmentation de 10 %, suivie d'une diminution de 20 %, suivie d'une augmentation de 50 % équivalent à une seule augmentation de 32 %.

VI – Taux d'évolution moyen

Illustration : Une quantité a subi 9 évolutions successives. Le taux global d'évolution est de 15 %. On cherche le taux d'évolution moyen, c'est-à-dire le taux t_M tel que 9 évolutions successives chacune de taux T_M correspond à une seule évolution de taux 15 %.

Remarque : Si T est le taux d'évolution global pour une quantité ayant subi n évolutions successives, et si t_M est son taux d'évolution moyen, on a alors $(1+t_M)^n=1+T$.

a) Racine *n*-ième d'un réel positif

Définition : Soit n un entier supérieur ou égal à 2, et a un réel positif. La racine *n*-ième du réel a est le réel positif x tel que $x^n=a$. On note ce réel $a^{\frac{1}{n}}$ (et aussi $\sqrt[n]{a}$).

Remarques :

- Si $n=2$, on retrouve la définition de la racine carrée.
- À la calculatrice ou au tableur, on utilise « ^ ». Par exemple $5^{\frac{1}{4}}$ se tape « 5^(1/4) ».

  On peut vérifier que $5^{\frac{1}{4}}\approx 1{,}495$.

b) Taux d'évolution moyen

Remarque : Si T est le taux d'évolution global pour une quantité ayant subi n évolutions successives, et si t_M est son taux d'évolution moyen, on a alors $(1+t_M)^n=1+T$, donc $1+t_M=(1+T)^{\frac{1}{n}}$.

Propriété : Si une quantité subit n évolutions dont le taux global est T , alors le taux moyen t_M vérifie $t_M=(1+T)^{\frac{1}{n}}-1$.

Exemple : Une quantité augmente deux fois de 20 % puis diminue une fois de 30 %.
Le taux global T vérifie donc $T=\left(1+\frac{20}{100}\right)\left(1+\frac{20}{100}\right)\left(1-\frac{30}{100}\right)-1=0{,}008=0{,}8\,\%$.
Comme il y a trois évolutions, le taux moyen t_M vérifie donc
$t_M=(1+0{,}008)^{\frac{1}{3}}-1\approx 0{,}0027=0{,}27\,\%$.
Deux augmentations de 20 % suivies d'une diminution de 30 % équivalent à trois augmentations de 0,27 % environ.

Chapitre 2 – Statistiques

I – Rappels sur les statistiques à une variable

On considère les âges d'un groupe de personnes.

Âge (ans)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Effectif	1	2	1	3	5	6	7	4	1	2	2
Effectif Cumulé Croissant	1	3	4	7	12	18	25	29	30	32	34

L'**effectif total** est $N=1+2+1+3+5+6+7+4+1+2+2=34$ (c'est le dernier effectif cumulé croissant).

a) Indicateurs de tendance centrale

- Le **mode** est la valeur la plus fréquente, donc 6 ans (car 7 personnes ont 6 ans)
- La **moyenne** est $\bar{x}=\frac{0\times1+1\times2+2\times1+3\times3+4\times5+5\times6+6\times7+7\times4+8\times1+9\times2+10\times2}{34}\approx5{,}26$ ans.
- La **médiane** est la valeur qui sépare la série statistique en deux parties de même effectif. Ici, il y a 34 valeurs, donc la médiane est la moyenne de la $17^{\text{ème}}$ et la $18^{\text{ème}}$ valeur. Grâce aux effectifs cumulés croissants, la $17^{\text{ème}}$ valeur est 5 ans, la $18^{\text{ème}}$ valeur est 5 ans. La médiane est $Me=\frac{5+5}{2}=5$ ans.

Rappel pour la calcul de la médiane :

– Si N est impair, la médiane est le terme de rang $\frac{N+1}{2}$).

– Si N est pair, la médiane est la moyenne des termes de rang $\frac{N}{2}$ et $\frac{N}{2}+1$).

b) Indicateurs de position et de dispersion

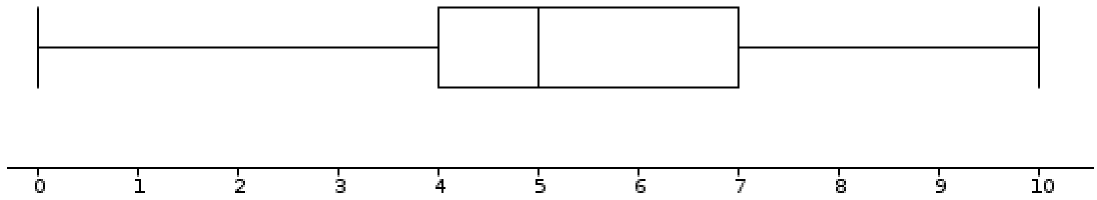
- Les **quartiles** : Le premier quartile Q_1 est la **plus petite** valeur telle qu'**au moins** un quart de l'effectif soit inférieur ou égal à Q_1. Le troisième quartile Q_3 est la **plus petite valeur** telle qu'**au moins** les trois quarts de l'effectif soient inférieurs ou égaux à Q_3.
  Ici, $\frac{N}{4}=\frac{34}{4}=8{,}5$, donc Q_1 est la $9^{\text{ème}}$ valeur : $Q_1=4$ ans.
  $\frac{3N}{4}=\frac{3\times34}{4}=25{,}5$, donc Q_3 est la $26^{\text{ème}}$ valeur : $Q_3=7$ ans.

- L'**écart-type** : Cette valeur permet de savoir si les valeurs sont dispersées ou non. Elle est donnée par la calculatrice. Ici, $\sigma\approx2{,}39$ ans.

c) Diagrammes en boîte

Pour résumer notre série statistique, on construit un diagramme en boîte.
- Les valeurs du caractère sont résumées sur un axe.
- On construit un rectangle (la boîte), parallèlement à l'axe, dont la longueur est l'intervalle interquartile $[Q_1 ; Q_3]$.
- Un trait symbolise la médiane Me.
- On place les moustaches au niveau des valeurs extrêmes.

Ici, on a donc comme diagramme en boîte pour notre série statistiques d'âges :



II – Statistiques à deux variables

<u>Principe :</u> On étudie deux caractères quantitatifs sur un échantillon. Par exemple, on peut étudier la taille et la masse sur une population, ou encore le prix et la durée de vie moyenne de différents articles...

a) Nuage de points

<u>Définition :</u> On étudie deux caractères (notés x et y) sur un échantillon de taille n.

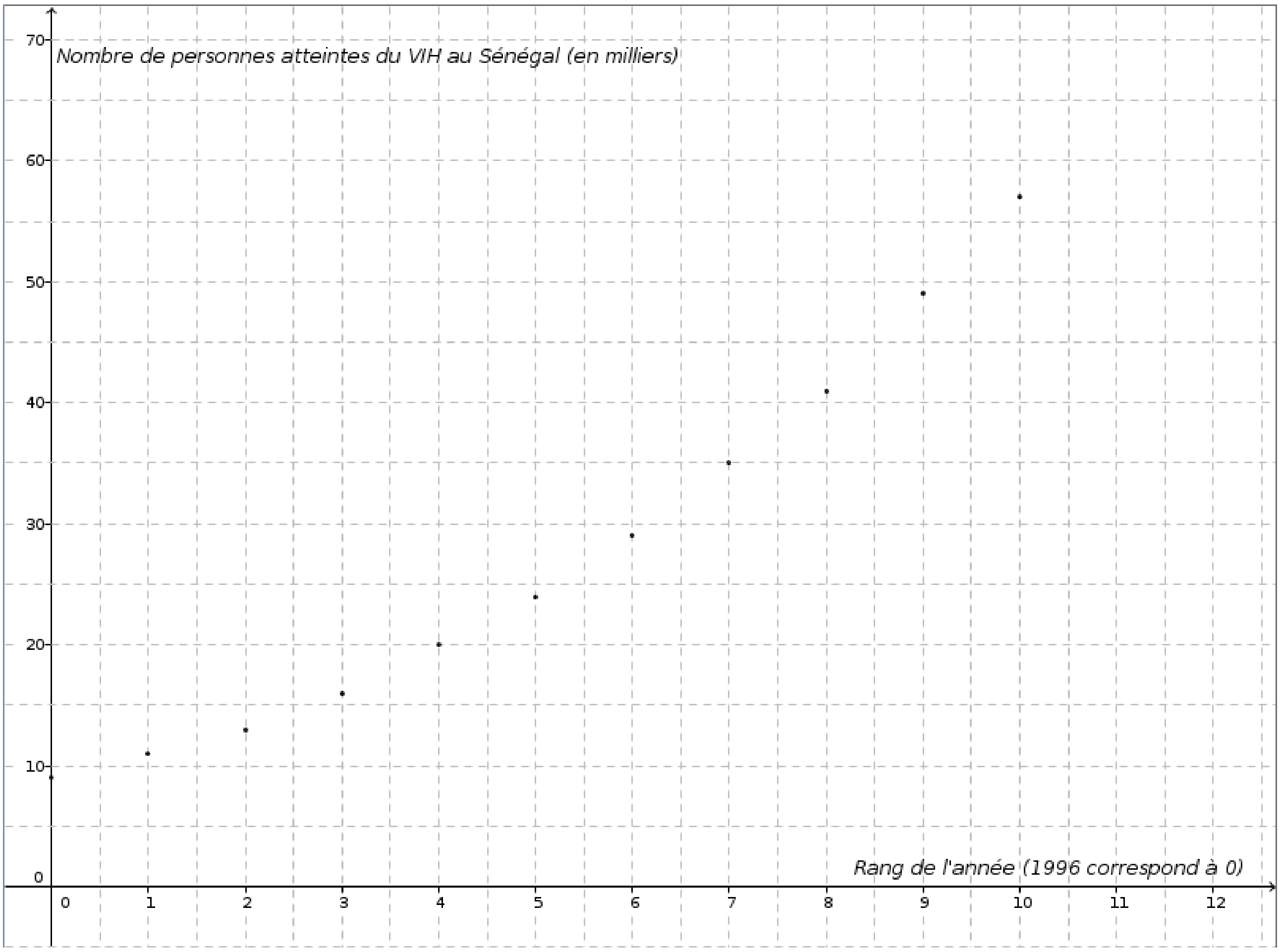
On a donc en tout $2n$ données : n données x_1, ..., x_n du caractère x, associées aux n données y_1, ..., y_n du caractère y. Le <u>nuage de points</u> sera l'ensemble des points $(x_1 ; y_1)$, ..., $(x_n ; y_n)$.

<u>Exemple :</u> Le tableau ci-dessous présente les données de 1996 à 2006 du nombre de personnes vivant avec le VIH au Sénégal.

Année	*1996*	*1997*	*1998*	*1999*	*2000*	*2001*	*2002*	*2003*	*2004*	*2005*	*2006*
Rang de l'année x_i	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
Estimation du nombre de personnes vivant avec le VIH (en milliers) y_i	*9*	*11*	*13*	*16*	*20*	*24*	*29*	*35*	*41*	*49*	*57*

Source : UNAIDS (Joint United Nations program on HIV/AIDS)

Le nuage de points est donc constitué des points de coordonnées (0 ; 9), (1 ; 11), (2 ; 13), …, (10,57).



b) Point moyen

Définition : Le point moyen G d'un nuage de points est le point dont l'abscisse est la moyenne des abscisses, et l'ordonnée la moyenne des ordonnées.

Ses coordonnées $(\bar{x};\bar{y})$ vérifient donc $\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$ et $\bar{y}=\frac{y_1+y_2+\ldots+y_n}{n}$.

Exemple : Avec notre exemple précédent, on a $\bar{x}=\frac{0+1+2+3+4+5+6+7+8+9+10}{11}=5$ *et*

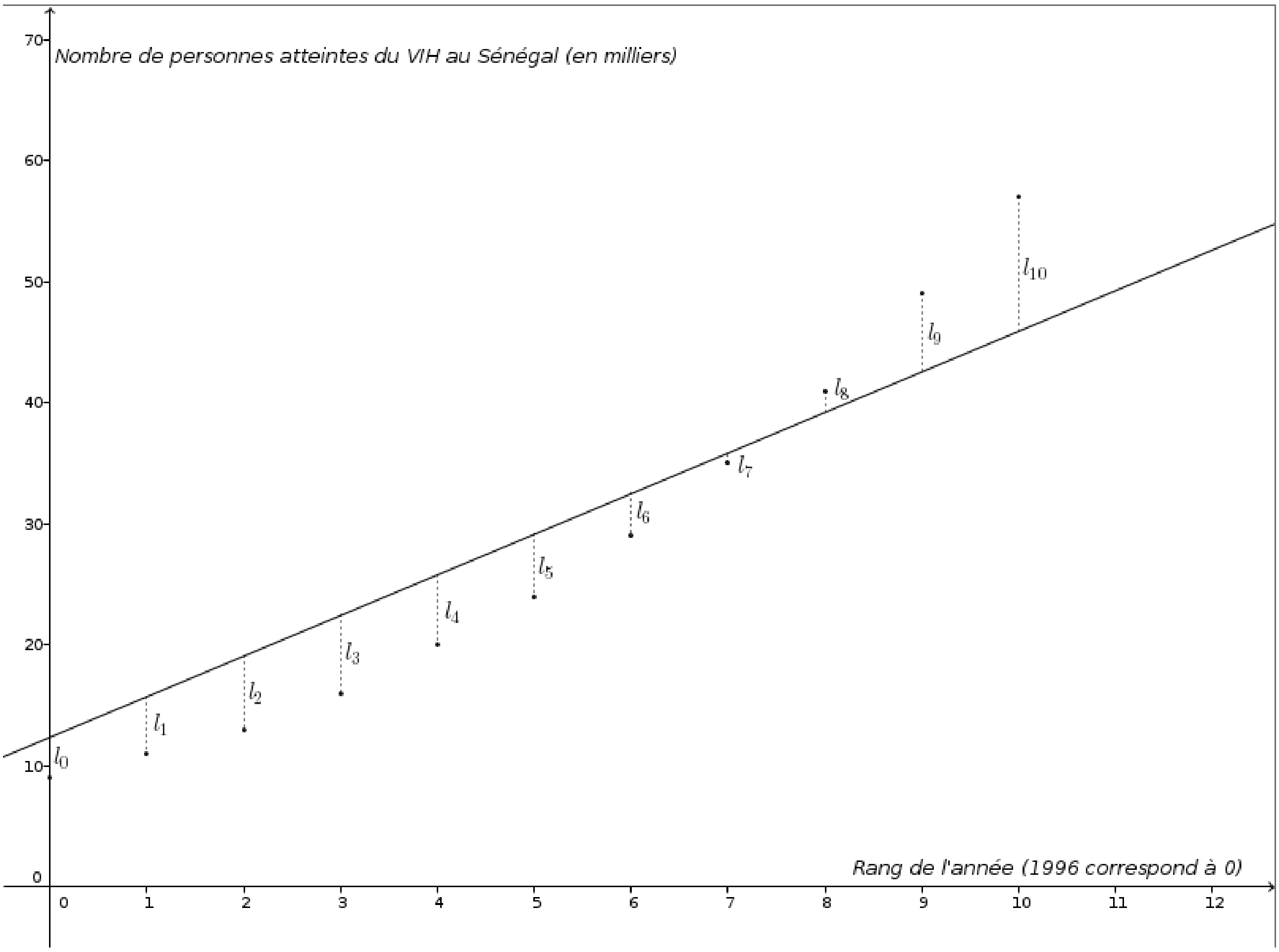
$\bar{y}=\frac{9+11+13+16+20+24+29+35+41+49+57}{11}=\frac{304}{11}$.

Le point moyen G a pour coordonnées $\left(5;\frac{304}{11}\right)$.

c) Droite de régression par la méthode des moindres carrés

Principe : *Lorsque les points du nuage semble à-peu-près alignés, on peut chercher l'équation d'une droite passant « au-plus-près » des points...*

On a tracé une droite ***arbitraire*** *qui semble passer près des points :*



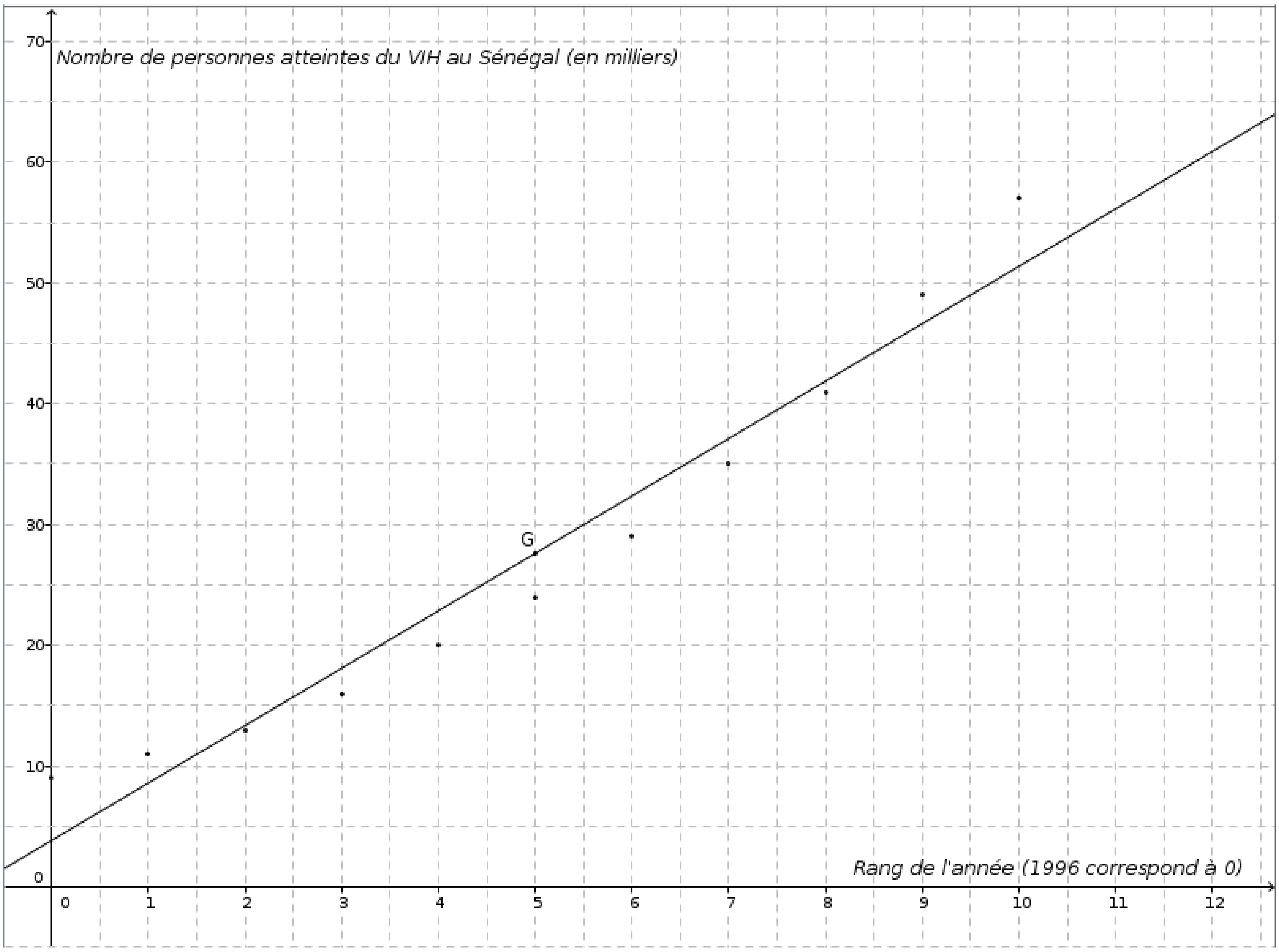
Les longueurs l_0, l_1, …, l_{10} correspondent aux distances entre les points et leurs projections verticales sur la droite.

Définition : **On considère un nuage de n points. Pour une droite donnée, on s'intéresse aux distances verticales l_1, …, l_n.**

La droite de régression par la méthode des moindres carrés pour un nuage de n points est la droite pour laquelle la quantité $l_1^2+l_2^2+l_3^2+\ldots+l_n^2$ est la plus petite possible.

L'équation de cette droite nous sera donnée par la calculatrice, en utilisant la régression linéaire du menu statistiques : la droite ayant une équation du type $y=ax+b$, la calculatrice nous fournira les coefficients a et b.

Exemple : *La calculatrice nous donne comme équation pour la droite de régression par la méthode des moindres carrés $y=4{,}75x+3{,}86$ (en arrondissant au centième).*



<u>Théorème :</u> Le point moyen G appartient toujours à la droite de régression par la méthode des moindres carrés.

<u>d) Utilisation de la droite de régression</u>

La droite de régression permet de faire des estimations.

<u>Exemple :</u> On cherche à estimer le nombre de personnes atteintes du VIH au Sénégal en 2013.
2013 correspond à $x=17$. On cherche la valeur y correspondante :
Comme la droite à pour équation $y=4{,}75x+3{,}86$, on a $4{,}75\times 17+3{,}86=84{,}61$.
On peut estimer à 85 milliers environ le nombre de personnes atteintes du VIH en 2013 au Sénégal.

Chapitre 3 – Suites numériques

I – Généralités sur les suites

Une suite est une liste de nombres partant d'un premier terme.

Le nombre u_n (aussi noté $u(n)$) où $n \in \mathbb{N}$ est le *terme général de rang* n de la suite u – cette suite peut aussi se noter (u_n) .

- u_{n-1} est le terme qui précède u_n , puisque $n-1$ est l'*indice* précédent n ;
- de même, u_{n+1} est le terme qui suit u_n , puisque $n+1$ est l'indice suivant n .

Rang	0	1	…	$n-1$	n	$n+1$
Terme	u_0	u_1	…	u_{n-1}	u_n	u_{n+1}

<u>*Exemple :*</u> *On considère la suite* (u_n) *définie pour tout entier naturel* $n \geqslant 3$ *par* $u_n = 3n^2 + 4$.

Le premier terme est donc $u_3 = 3 \times 3^2 + 4 = 31$ *– c'est le terme d'indice 3.*

Le deuxième terme est donc $u_4 = 3 \times 4^2 + 4 = 52$ *– c'est le terme d'indice 4.*

Pour $n \geqslant 3$ *, le terme d'indice* $n+1$ *est* $u_{n+1} = 3(n+1)^2 + 4 = 3(n^2 + 2n + 1) + 4 = 3n^2 + 6n + 7$.

II – Suites arithmétiques

<u>a) Définition</u>

Une suite (u_n) est arithmétique si et seulement si, pour passer d'un terme au suivant, on ajoute toujours la même constante r – c'est-à-dire, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$ avec $r \in \mathbb{R}$. La constante r est la *raison* de la suite arithmétique.

<u>*Exemples :*</u>

- *Considérons une suite* u *telle que* $u_0 = 3$; $u_1 = 5$ *et* $u_2 = 8$. $u_1 - u_0 = 2$ *et* $u_2 - u_1 = 3$ *donc la suite n'est pas arithmétique vu que l'on n'ajoute pas la même quantité pour passer de* u_0 *à* u_1 *et de* u_1 *à* u_2 .
- *Soit* u *la suite définie pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *par* $u_n = 5n + 6$.

  Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 5(n+1) + 6 - (5n+6) = 5n + 5 + 6 - 5n - 6 = 5$ *donc* u *est arithmétique de raison 5.*

b) Terme général

Illustration : Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 .

On a donc :

- $u_1 = u_0 + r$.
- $u_2 = u_1 + r = u_0 + r + r = u_0 + 2r$.
- $u_3 = u_2 + r = u_0 + 2r + r = u_0 + 3r$.
- $\dots$
- $u_n = u_0 + nr$.

Théorème : Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 .

On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$.

On a également, pour $n \geqslant 1$, $u_n = u_1 + (n-1)r$.

Remarque : Plus généralement, si u est arithmétique de raison r , pour tous entiers n et p avec $p \leqslant n$, on a $u_n = u_p + (n-p)r$.

Exemple : Soit (u_n) une suite arithmétique de raison 3 telle que $u_0 = 5$.

On alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + n \times 3 = 5 + 3n$. Par exemple, $u_7 = 5 + 3 \times 7 = 26$ et $u_{20} = 5 + 3 \times 20 = 65$ – on pouvait aussi remarquer que $u_{20} = u_7 + 13 \times 5 = 26 + 13 \times 3 = 65$.

c) Sens de variation

Théorème : Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 .

- **(u_n) est strictement croissante si et seulement si $r > 0$.**
- **(u_n) est strictement décroissante si et seulement si $r < 0$.**
- **(u_n) est constante si et seulement si $r > 0$.**

III – Suites géométriques

a) Définition

Une suite (u_n) est géométrique si et seulement si, pour passer d'un terme au suivant, on multiplie toujours par la même constante q – c'est-à-dire, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \times q$ avec $q \in \mathbb{R}$. La constante q est la *raison* de la suite géométrique.

Exemples :

- *Considérons une suite u telle que $u_0 = 6$; $u_1 = 3$ et $u_2 = 1$. $\frac{u_1}{u_0} = \frac{1}{2}$ et $\frac{u_2}{u_1} = \frac{1}{3}$ donc la suite n'est pas géométrique vu que l'on ne multiplie pas par la même quantité pour passer de u_0 à u_1 et de u_1 à u_2 .*
- *Soit u la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 5 \times 3^n$.*

  Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5 \times 3^{n+1}}{5 \times 3^n} = \frac{3^{n+1}}{3^n} = 3$ donc u est géométrique de raison 3.

b) Terme général

Illustration : Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 .

On a donc :

- $u_1 = u_0 \times q$.
- $u_2 = u_1 \times q = u_0 \times q \times q = u_0 \times q^2$.
- …
- $u_n = u_0 \times q^n$.

Théorème : Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 .

On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$.

On a également, pour $n \geqslant 1$, $u_n = u_1 \times q^{n-1}$.

Remarque : Plus généralement, si u est géométrique de raison q , pour tous entiers n et p avec $p \leqslant n$, on a $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

Exemple : Soit (u_n) une suite géométrique de raison 2 telle que $u_0 = 1$.

On alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times 2^n = 1 \times 2^n = 2^n$. Par exemple, $u_7 = 2^7 = 128$ et $u_{20} = 2^{20} = 1\,048\,576$ – on pouvait aussi remarquer que $u_{20} = u_7 \times 2^{13} = 128 \times 2^{13} = 1\,048\,576$.

IV – Exemple de comparaison de suites

À leur naissance, Madeleine et Élise ont reçu chacune 4 000 € de leur grand-père.

Pour Madeleine, le grand-père a choisi un placement à intérêts simples, au taux annuel de 7 %, et pour Élise, il a choisi un placement à intérêts composés au taux annuel de 5 %. Elles pourront recevoir leur argent à leur majorité, à 18 ans.

a) Placement de Madeleine

Le placement est à intérêts simples, donc le montant des intérêts annuels est de $4\,000\times\frac{7}{100}=280$ €, c'est-à-dire, que chaque année, le capital augmente de 280 €.

Soit u_n le capital au bout de n années de placement. On a donc $u_{n+1}=u_n+280$, donc (u_n) est arithmétique de raison 280 et de premier terme $u_0=4\,000$.

Le terme général est donc $u_n=u_0+280\,n=4\,000+280\,n$.

b) Placement d'Élise

Le placement est à intérêts composés, donc chaque année le capital augmente de 5 %, c'est-à-dire que le capital est multiplié par $1+\frac{5}{100}=1{,}05$.

Soit v_n le capital au bout de n années de placement. On a donc $v_{n+1}=1{,}05\,v_n$, donc (v_n) est géométrique de raison 1,05 et de premier terme $v_0=4\,000$.

Le terme général est donc $v_n=v_0\times1{,}05^n=4\,000\times1{,}05^n$.

c) Comparaison des suites

On veut savoir à leur majorité quel sera le placement le plus intéressant. Pour ceci, on calcule u_{18} et v_{18} :

- $u_{18}=4\,000+280\times18=9\,040$
- $v_{18}=4000\times1{,}05^{18}\approx9\,626{,}48$

Le placement d'Élise est plus intéressant.

d) Utilisation du tableur

On peut utiliser le tableur d'un ordinateur ou de la calculatrice pour calculer les termes des deux suites.

Pour les formules, on peut :

- Soit utiliser les termes généraux, c'est-à-dire :
    - saisir **=4000+280*A5** en **B5**, puisque $u_n = 4\,000 + 280\,n$;
    - saisir **=4000*1,05^A5** en **C5**, puisque $v_n = 4\,000 \times 1{,}05^n$;
    - recopier les formules de **B5** et **C5** jusqu'en **B23** et **C23**.
- Soit se passer des termes généraux, c'est-à-dire :
    - saisir **4000** en **B5** et **C5** ;
    - saisir **=B5+280** en **B6**, puisque (u_n) est arithmétique de raison 280 ;
    - saisir **=C5*1,05** en **C6**, puisque (v_n) est géométrique de raison 1,05 ;
    - recopier les formules de **B6** et **C6** jusqu'en **B23** et **C23**.

	A	B	C
1	**intérêts**	**simples**	**composés**
2	**taux**	**7 %**	**5 %**
3	**année**	**Madeleine**	**Élise**
4	n	u_n	v_n
5	0	4000,00	4000,00
6	1	4280,00	4200,00
7	2	4560,00	4410,00
8	3	4840,00	4630,50
9	4	5120,00	4862,03
10	5	5400,00	5105,13
11	6	5680,00	5360,38
12	7	5960,00	5628,40
13	8	6240,00	5909,82
14	9	6520,00	6205,31
15	10	6800,00	6515,58
16	11	7080,00	6841,36
17	12	7360,00	7183,43
18	13	7640,00	7542,60
19	14	7920,00	7919,73
20	15	8200,00	8315,71
21	16	8480,00	8731,50
22	17	8760,00	9168,07
23	18	9040,00	9626,48

Chapitre 4 – Probabilités conditionnelles

I – Évènements et probabilités

On considère une expérience aléatoire, par exemple le lancé d'un dé équilibré.

a) Définitions

- Une *issue* est un résultat possible de l'expérience.

  Ici, 1 est une issue, 2 aussi. 7 n'en est pas une...
- L'*univers* Ω est l'ensemble de toutes les issues possibles.

  Ici, $\Omega=\{1;2;3;4;5;6\}$.
- Un *évènement* est une partie de l'univers.

  Ici, si on considère l'évènement A *« Le résultat est un nombre pair », alors* $A=\{2;4;6\}$.
- La *probabilité* d'une issue est un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0;1]$ associé à l'issue. Plus celui-ci est grand, plus l'issue a de chances de se réaliser.

  Ici, comme le dé est équilibré, chaque issue a pour probabilité $\frac{1}{6}$.

b) Probabilité d'un évènement

- La probabilité d'un évènement est la somme des probabilités des issues qui le composent ;

  Ici, $P(A)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.
- Lorsque toutes les issues de Ω ont la même probabilité, on dit que l'on est dans une situation d'*équiprobabilité*.

c) Opérations sur les évènements

On considère toujours comme exemple le lancé d'un dé équilibré.

Soient A l'évènement « le résultat est un nombre pair » et B « Le résultat est inférieur ou égal à 2 ». On a donc $A=\{2;4;6\}$ et $B=\{1;2\}$.

- L'*évènement contraire* à A est l'évènement constitué de toutes les issues qui ne réalisent pas A. Il est noté $\overline{A}$.

  Ici, $\overline{A}=\{1;3;5\}$; c'est l'évènement « Le résultat n'est pas un nombre pair ».

- L'*intersection* des évènements A et B est l'évènement formé des issues qui réalisent à la fois A et B. Il est noté $A\cap B$.

  Ici, $A\cap B=\{2\}$; c'est l'évènement « Le résultat est pair et inférieur ou égal à 2 ».

- L'*union* des évènements A et B est l'évènement formé des issues qui réalisent au moins l'un des évènements A ou B. Il est noté $A\cup B$.

  Ici, $A\cup B=\{1;2;4;6\}$; c'est l'évènement « Le résultat est pair ou inférieur ou égal à 2 ».

d) Formules

- $P(\Omega)=1$ et $P(\emptyset)=0$.
- Pour tout évènement A, $0\leqslant P(A)\leqslant 1$.
- Dans une situation d'équiprobabilité, pour tout évènement A,
  $P(A)=\dfrac{\text{nombre d'issues de } A}{\text{nombre total d'issues de } \Omega}$.
- $P(\overline{A})=1-P(A)$.
- $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.
- $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ et $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

II – Probabilité conditionnelle

Illustration : Lors d'une vente promotionnelle dans une boutique, une étude sur 200 clients montre que 120 clients achètent un pull et, parmi eux, 24 ont en plus acheté un pantalon.

De plus, parmi les 80 clients qui n'achètent pas de pull, 40 achètent un pantalon.

On choisit au hasard un client.

Soient A l'évènement « Le client achète un pull » et B l'évènement « Le client achète un pantalon ».

On a donc $P(A)=\dfrac{120}{200}=0{,}6$ et $P(\overline{A})=1-0{,}6=0{,}4$.

De plus, $P(A\cap B)=\frac{24}{200}=0{,}12$, $P(\bar{A}\cap B)=\frac{40}{200}=0{,}2$, $P(A\cap \overline{B})=\frac{96}{200}=0{,}48$ et $P(\overline{A}\cap \overline{B})=\frac{40}{200}=0{,}2$.

Parmi les clients ayant acheté un pull, la part de ceux ayant acheté un pantalon est $\frac{24}{120}=0{,}2$.

Comme ici l'évènement A est réalisé, on dit que la probabilité de l'évènement B *sachant* A est 0,2.

On remarque que $\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0{,}12}{0{,}6}=0{,}2$.

a) Définition d'une probabilité conditionnelle

On considère deux évènements A et B tel que $P(A)\neq 0$.

La probabilité de l'évènement B , sachant que A est réalisé, se note $P_A(B)$.

On a $P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$.

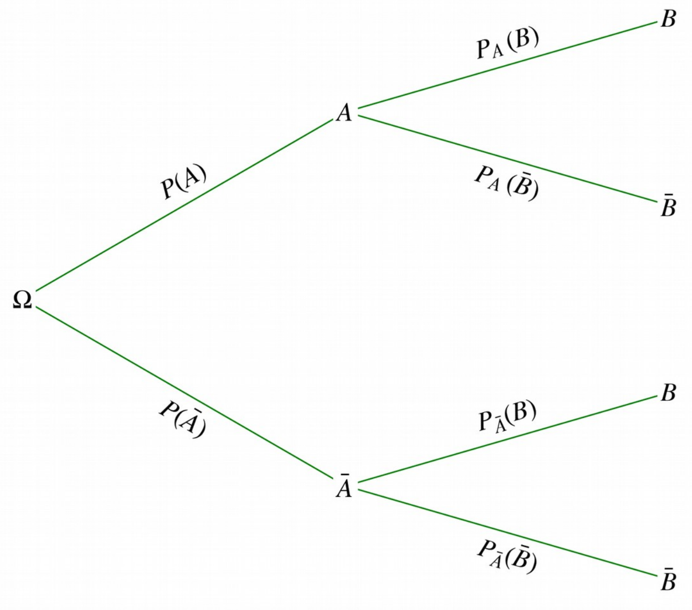
On en déduit donc que $P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)$.

<u>Exemple :</u> On a ici $P_A(B)=0{,}2$.

On a également $P_A(\overline{B})=\frac{P(A\cap \overline{B})}{P(A)}=\frac{0{,}48}{0{,}6}=0{,}8$, $P_{\overline{A}}(B)=\frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(\overline{A})}=\frac{0{,}2}{0{,}4}=0{,}5$ et $P_{\overline{A}}(\overline{B})=\frac{P(\overline{A}\cap \overline{B})}{P(\overline{A})}=\frac{0{,}2}{0{,}4}=0{,}5$.

b) Utilisation d'un arbre

On peut construire un arbre pour illustrer la situation :

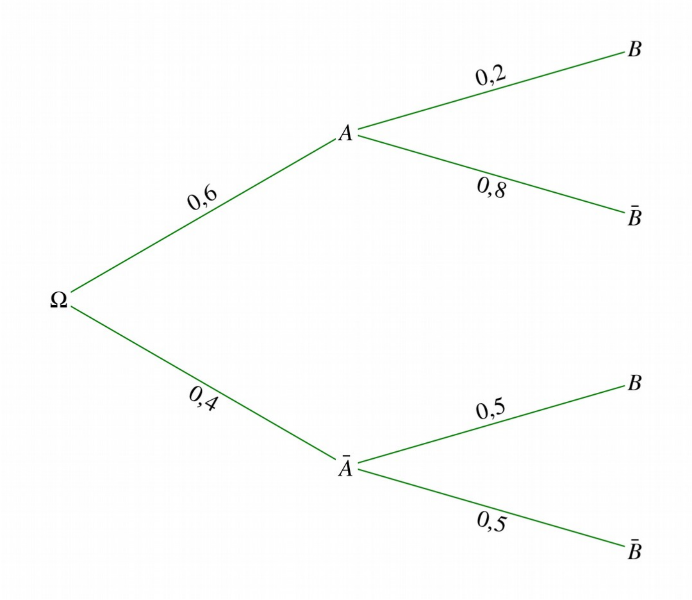


Le chemin $A\cap B$ est le chemin qui part de Ω , passe par A et arrive en B . On a en utilisant les formules, $P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)$.

La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités des branches qui le composent.

Comme $P(A)+P(\overline{A})=1$, **la somme des probabilités qui partent d'un nœud est égale à 1**.

<u>Exemple :</u> On a ici comme arbre :



<u>c) Probabilité totale dans une partition</u>

Les évènements A et $\overline{A}$ forment une *partition* de l'univers Ω , c'est-à-dire que toute issue appartient soit à A , soit à $\overline{A}$.

Une issue réalisant B réalise donc soit $B\cap A$, soit $B\cap\overline{A}$.

On a donc $P(B)=P(B\cap A)+P(B\cap\overline{A})$.

<u>Exemple :</u> On a donc ici $P(B)=P(B\cap A)+P(B\cap\overline{A})=0{,}12+0{,}2=0{,}32$.

La probabilité qu'un client ait acheté un pantalon est 0,32.

Chapitre 5 – Fonctions dérivées

I – Fonction dérivée et tangente

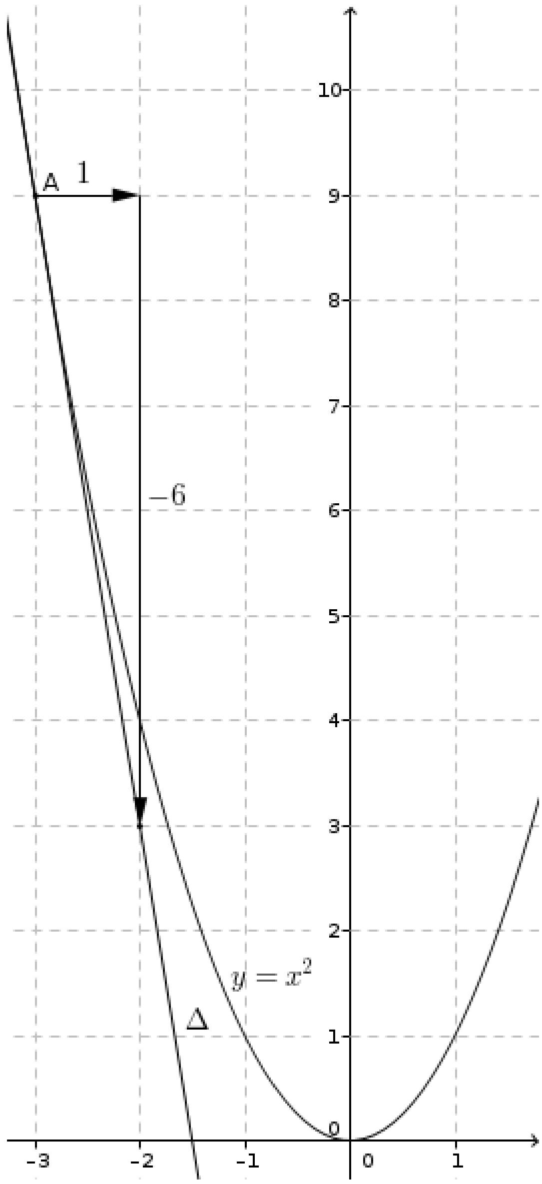
<u>Définition :</u> Soit f un fonction définie sur un intervalle I . On considère sa courbe C dans un repère. Soit A un point appartenant à la courbe C .

Si elle existe, la droite passant par A qui « frôle » la courbe C est appelée *tangente* en A à la courbe C .

<u>Exemple :</u> Considérons la fonction $f(x)=x^2$ définie sur $\mathbb{R}$.

La droite Δ est la tangente en A à la courbe de la fonction f .

A a pour abscisse -3 .



<u>Définition :</u> Soit f une fonction définie sur un intervalle I admettant une tangente en tout $x \in I$. On appelle fonction dérivée de f la fonction notée f' qui a tout $x \in I$ associe le *coefficient directeur de la tangente à la courbe* de f au point d'abscisse x .

<u>Exemples:</u> Avec l'exemple précédent ($f(x)=x^2$), on a déterminé que la tangente Δ au point de la courbe A d'abscisse $x=-3$ a pour coefficient directeur -6 .

On en déduit donc que $f'(-3)=-6$.

On peut déterminer l'équation de Δ : son équation est $y=ax+b$ or $a=-6$ et $A(-3;9) \in \Delta$:

$9=-6\times(-3)+b \Leftrightarrow 9=18+b \Leftrightarrow -9=b$.

Δ a pour équation $y=-6x-9$.

De même, la tangente à la courbe en $x=0$ est horizontale (c'est l'axe des abscisses). Son coefficient directeur est donc 0, donc $f'(0)=0$.

II – Calcul des dérivées des fonctions polynômes

a) Dérivées des fonctions puissances

Théorème : Les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$ ont pour dérivées sur $\mathbb{R}$:

$f(x)=$	$f'(x)=$
k (f est une fonction constante)	0
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
x^n (n est un entier naturel)	nx^{n-1}

Exemples :

- *Si* $f(x)=5$ *, alors* $f'(x)=0$ *.*
- *Si* $f(x)=x^8$ *, alors* $f'(x)=8x^{8-1}=8x^7$ *.*
- *Si* $f(x)=x^{15}$ *, alors* $f'(x)=15x^{15-1}=15x^{14}$ *.*

b) Opérations sur les dérivées

Théorème : Soients u une fonction dérivable sur un intervalle I et k un réel.
Alors, la fonction ku est dérivable sur I et sa dérivée est ku' .

Exemples :
- *Si* $f(x)=5x$ *, alors* $f'(x)=5\times1=5$ *.*
- *Si* $f(x)=-3x^5$ *, alors* $f'(x)=-3\times5x^{5-1}=-15x^4$ *.*

Théorème : Soients u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I .
Alors, la fonction $u+v$ est dérivable sur I et sa dérivée est $u'+v'$.

Exemples :
- *Si* $f(x)=x+x^2$ *, alors* $f'(x)=1+2x$ *.*
- *Si* $f(x)=5x^6+3x^2-x+5$ *, alors* $f'(x)=5\times6x^{6-1}+3\times2x-1+0=30x^5+6x-1$ *.*

III – Calcul des dérivées des fonctions rationnelles

a) Dérivée de la fonction inverse

<u>Théorème :</u> La fonction inverse définie sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{x}$ est dérivable sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ et sa dérivée est $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$.

<u>Exemple :</u> Si $f(x)=\frac{7}{x}$, comme $f(x)=7\times\frac{1}{x}$, alors $f'(x)=7\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{7}{x^2}$.

b) Quotient de deux fonctions dérivables

<u>Théorème :</u> Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que v ne s'annule pas sur I. Alors la fonction $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et sa dérivée est $\frac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{(v(x))^2}$.

<u>Exemple :</u> Soit $f(x)=\frac{5x-3}{3x+1}$ définie sur $\left]-\frac{1}{3};+\infty\right[$.

$f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x)=5x-3$ et $v(x)=3x+1$.

On a donc $u'(x)=5\times1-0=5$ et $v'(x)=3\times1+0=3$.

On a donc $f'(x)=\frac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{(v(x))^2}=\frac{5(3x+1)-3(5x-3)}{(3x+1)^2}=\frac{15x+1-15x+9}{(3x+1)^2}=\frac{10}{(3x+1)^2}$.

IV – Dérivée et variations

<u>Théorème :</u> Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- **Si $f'(x)>0$ pour tout $x\in I$, alors f est strictement croissante sur I .**
- **Si $f'(x)<0$ pour tout $x\in I$, alors f est strictement décroissante sur I .**

<u>Remarque :</u> ce théorème permet de déterminer le tableau de variations d'une fonction.

<u>Exemple :</u> Soit $f(x)=3x^2+4x-1$ *définie sur* $\mathbb{R}$.

$f'(x)=3\times 2x+4\times 1-0=6x+4$.

On étudie le signe de $f'(x)$ *(ici, il s'agit d'une fonction affine) :*

$6x+4=0 \Leftrightarrow 6x=-4 \Leftrightarrow x=-\frac{4}{6} \Leftrightarrow x=-\frac{2}{3}$

On peut donc dresser le tableau de variations complet :

<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>$-\frac{2}{3}$</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td></td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td></td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td></td><td>$\searrow$</td><td>$-\frac{7}{3}$</td><td>$\nearrow$</td><td></td></tr>
</table>

On a en effet $f\left(-\frac{2}{3}\right)=3\times\left(-\frac{2}{3}\right)^2+4\times\left(-\frac{2}{3}\right)-1=3\times\frac{4}{9}+4\times\left(-\frac{6}{9}\right)-\frac{9}{9}=\frac{12}{9}-\frac{24}{9}-\frac{9}{9}=-\frac{21}{9}=-\frac{7}{3}$.

Chapitre 6 – Loi normale

I – Rappels sur la loi binomiale

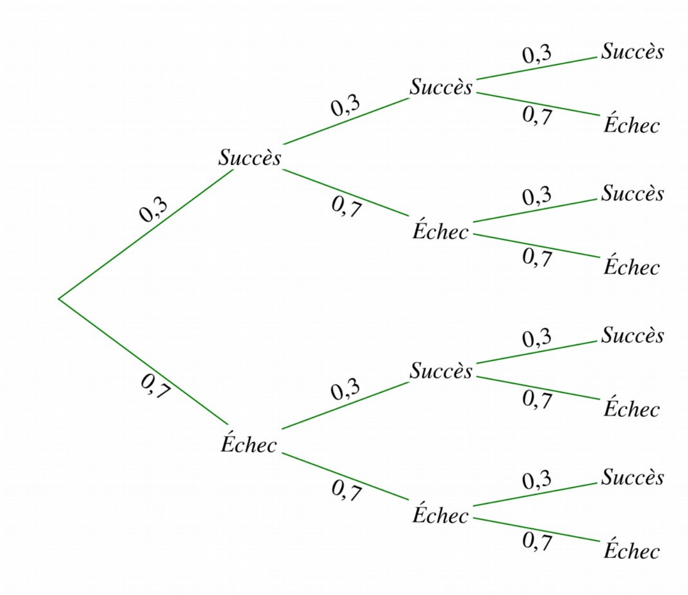
a) Situation

On répète n fois la même expérience, à deux issues possibles :

- Succès, de probabilité p ,
- Échec, de probabilité $1-p$.

On peut représenter cette situation par un arbre.

<u>Exemple :</u> si $n=3$ et $p=0{,}3$, on a cet arbre :



b) Loi binomiale

Dans la situation précédemment décrite, soit X la variable aléatoire associée au nombre k de succès parmi les n expériences.

X prend toutes les valeurs entières entre 0 et n .

<u>Définition :</u> On dit que X suit la *loi binomiale* de paramètres n et p .

On note $X \sim B(n;p)$.

Remarques :

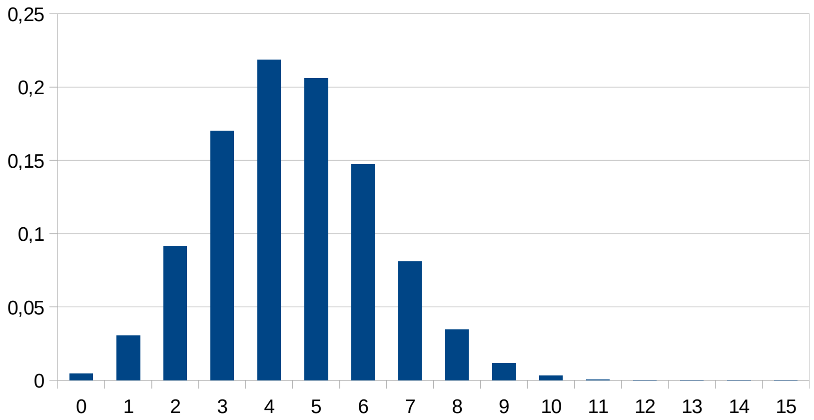
- Les probabilités se calculent avec la calculatrice ou le tableur.
- $P(X=k)$ est la probabilité d'obtenir exactement k succès parmi les n expériences.
- $P(X\leqslant k)$ est la probabilité d'obtenir au plus k succès parmi les n expériences.
- $P(X>k)=1-P(X\leqslant k)$.

Théorème : Si X suit la *loi binomiale* de paramètres n et p , alors son espérance est $E(X)=n\,p$.

Exemple : On lance 15 fois de suite une pièce de monnaie truquée : la probabilité d'obtenir « Pile » sur un lancé est 0,3.

Soit X , variable aléatoire égale au nombre de « Piles » obtenus ; on a donc $X\sim B(15\,;0{,}3)$.

On construit un diagramme représentant cette loi : en abscisse, ce sont les valeurs k de la variable aléatoire X (avec $0\leqslant k\leqslant 15$), et en ordonnée, les probabilités $P(X=k)$.



On a donc $E(X)=15\times 0{,}3=4{,}5$.

c) Utilisation de la calculatrice

On considère ici que $n=20$ et $p=0{,}6$.

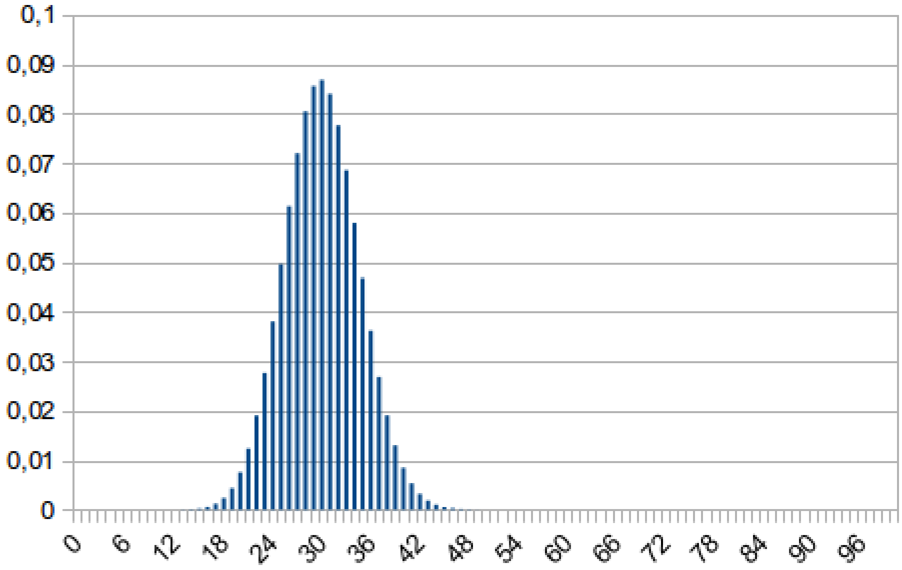
	Texas Instruments	Casio
Menu contenant les instructions	« **distrib** » (« 2nde », puis « var »)	« **BINM** » (« OPTN », « STAT », « DIST », puis « BINM »)
Calcul de $P(X=7)$	**binomFdp(20,0.6,7)**	**binomialPD(7,20,0.6)**
Calcul de $P(X\leqslant 7)$	**binomFrép(20,0.6,7)**	**binomialCD(7,20,0.6)**

II – Loi normale

a) Approximation de la loi binomiale par une loi normale

Illustration : *Soit* X *une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres* $n=100$ *et* $p=0{,}3$.

On construit un diagramme représentant cette loi : en abscisse, ce sont les valeurs k *de la variable aléatoire* X *(avec* $0 \leqslant k \leqslant 100$ *), et en ordonnée, les probabilités* $P(X=k)$.



On remarque que le diagramme ressemble à une courbe « en cloche ».

Cette courbe est celle d'une fonction, appelée densité de probabilité, qui définit une nouvelle loi de probabilité, appelée loi normale.

b) Courbe de la loi normale

Propriété : Deux paramètres caractérisent une loi normale :

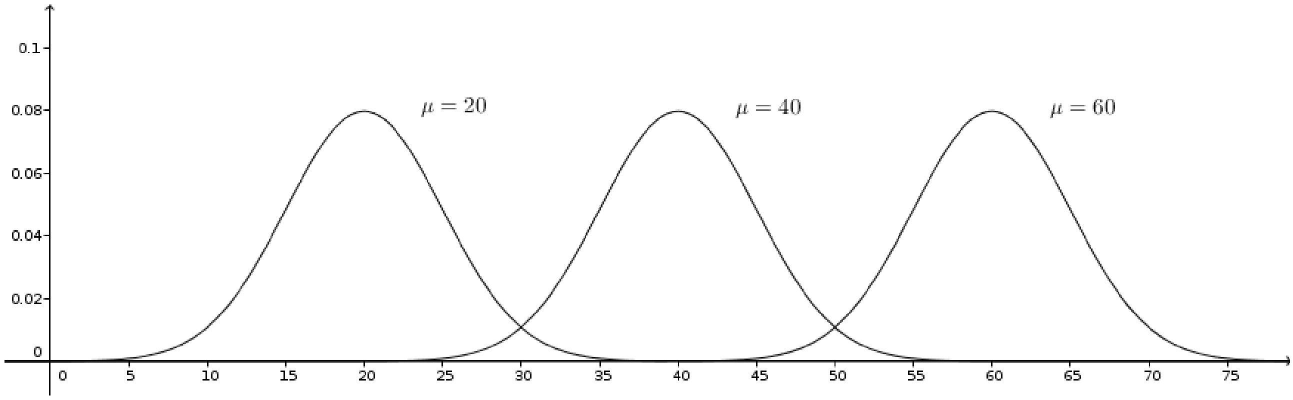
- **Son espérance** μ **, égale à celle de la loi binomiale qu'elle approche, c'est-à-dire** $n \times p$ **.**
- **Son écart-type** σ **.**

On dira alors qu'une variable aléatoire X **suit une loi normale de paramètres** μ **et** σ **.**

La courbe d'une loi normale ne dépend donc que de ces deux paramètres.

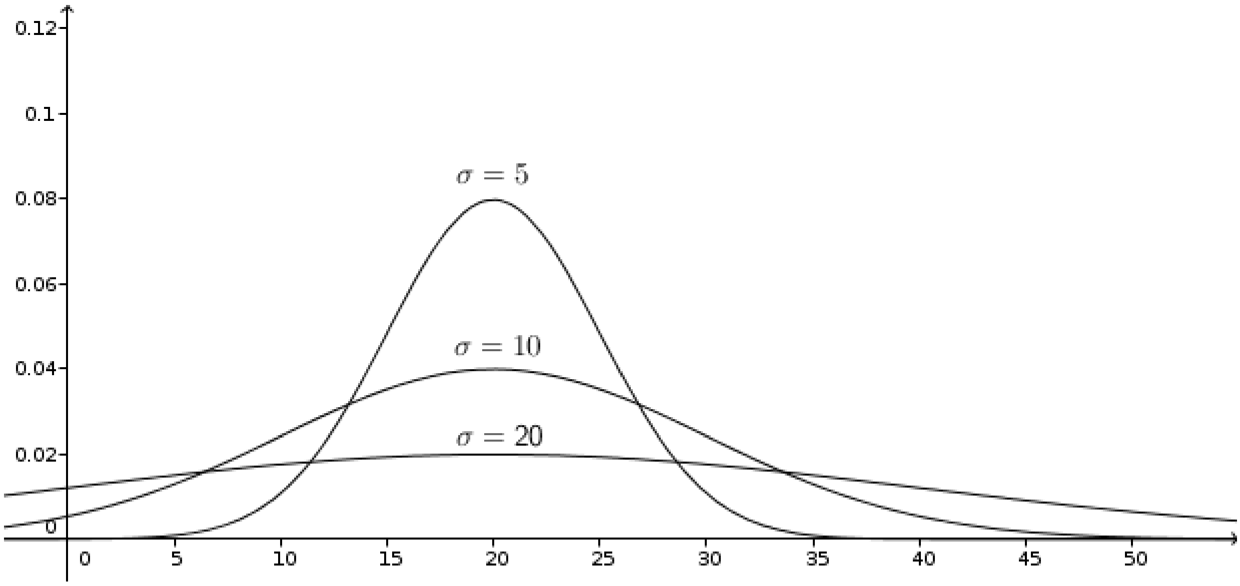
- Rôle de l'espérance μ :

  Les 3 lois normales suivantes ont le même écart-type :



- Rôle de l'écart-type σ :

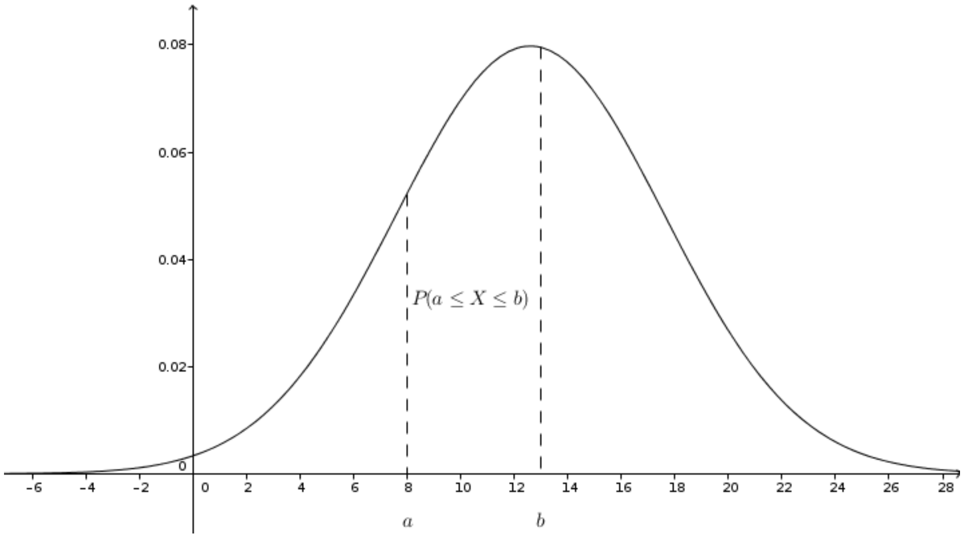
  Les 3 lois normales suivantes ont la même espérance :



<u>Propriété :</u> La courbe d'une loi normale est symétrique par rapport à la droite $x=\mu$.

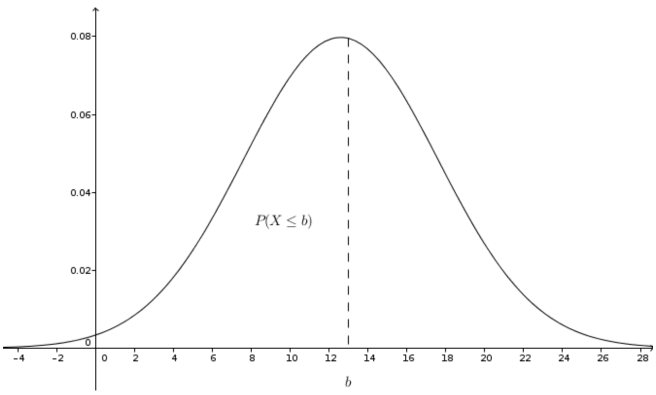
c) Calcul de probabilités avec la loi normale

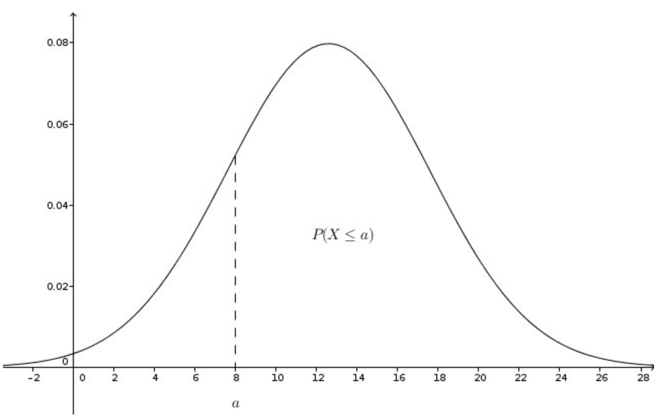
Propriété : **Soit X suivant une loi normale. La probabilité $P(a \leqslant X \leqslant b)$ que la variable aléatoire X appartienne à $[a;b]$ est égale à l'aire du domaine compris entre la courbe de la loi normale, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.**



Remarque : On en déduit que pour n'importe quel k , $P(X=k)=0$.

Propriété : **De même, $P(X \leqslant b)$ et $P(X \geqslant a)$ sont définies par des aires :**





Remarque : Avec la remarque précédente, on en déduit que $P(X \leqslant a) = P(X < a)$, $P(X \geqslant b) = P(X > b)$, ...

Propriétés :

- **L'aire sous la courbe d'une loi normale a pour aire 1.**
- **Par symétrie de la courbe par rapport à la droite $x = \mu$, on a $P(X \geqslant \mu) = 0{,}5$ et $P(X \leqslant \mu) = 0{,}5$.**
- **$P(X \geqslant a) = 1 - P(X < a)$ et $P(a \leqslant X \leqslant b) = P(X \leqslant b) - P(X < a)$.**

d) Utilisation de la calculatrice

On considère que X suit une loi normale de paramètres $\mu = 21$ et $\sigma = 7$.

	Texas Instruments	**Casio**
Menu contenant les instructions	« **distrib** » (« 2nde », puis « var »)	« **NORM** » (« OPTN », « STAT », « DIST », puis « NORM »)
Calcul de $P(10 \leqslant X \leqslant 30)$	**normalFrép(10,30,21,7)**	**normCD(10,30,7,21)**
Calcul de $P(X \leqslant 40)$	**normalFrép(-10^99,40,21,7)**	**normCD(-10^99,40,7,21)**
Calcul de $P(X \geqslant 25)$	**normalFrép(25,10^99,21,7)**	**normCD(25,10^99,7,21)**

On obtient $P(10 \leqslant X \leqslant 30) \approx 0{,}843$, $P(X \leqslant 40) \approx 0{,}997$, $P(X \geqslant 25) \approx 0{,}284$.

e) Intervalle de fluctuation

Propriété : Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale de paramètres μ et σ .

Alors, $P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0{,}95$. L'intervalle $[\mu - 2\sigma ; \mu + 2\sigma]$ est appelé « *intervalle de fluctuation au seuil 95 %* ».

Exemple : Si X suit une loi normale de paramètres $\mu = 62$ et $\sigma = 9$, l'intervalle de fluctuation au seuil 95 % est $[62 - 2 \times 9 ; 62 + 2 \times 9] = [44 ; 80]$.

Chapitre 7 – Échantillonnage et estimation

I – Principe de l'échantillonnage et de l'estimation

On illustre la situation ainsi : on dispose d'une grande urne où se trouve un très grand nombre de boules rouges et bleues.

Cas 1 : la proportion p des boules rouges est connue	**Cas 2 : la proportion p des boules rouges est inconnue**
On tire au hasard avec remise n boules de l'urne. On obtient donc une fréquence f de boules rouges sur cet échantillon. On s'attend à ce que la fréquence f observée soit « proche » de p, fréquence théorique. On est ici dans le cadre d'un échantillonnage.	On veut donc estimer la proportion p de boules rouges dans l'urne. Comme il y en a beaucoup, on ne peut pas toutes les compter. On tire donc au hasard avec remise n boules de l'urne. On obtient donc une fréquence f de boules rouges sur cet échantillon. On s'attend à ce que la fréquence p théorique soit « proche » de f, fréquence observée. On est ici dans le cadre d'une estimation.

II – Intervalles de fluctuation et de confiance

a) Calcul des intervalles de fluctuation et de confiance

Échantillonnage	**Estimation**
On connait p, fréquence théorique d'un caractère sur une population. On a un échantillon de taille n. **L'intervalle** $\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}};p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ **est appelé intervalle de *fluctuation* au seuil 95 %** de la fréquence de ce caractère aléatoire de taille n issu de la population. Conditions de validité : $n\geqslant 30$, $np\geqslant 5$ et $n(1-p)\geqslant 5$.	On connait f, fréquence observée d'un caractère sur un échantillon de taille n d'une population. **L'intervalle** $\left[f-\frac{1}{\sqrt{n}};f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ **est appelé intervalle de *confiance* au seuil 95 %** de la proportion p de ce caractère aléatoire de la population.

b) Signification des intervalles

Échantillonnage	Estimation
La fréquence observée f sur un échantillon de taille n appartient à l'**intervalle de fluctuation au seuil 95 %** dans 95 % des cas.	Au moins 95 % des **intervalles de confiance au seuil 95 %** contiennent la fréquence théorique p.

Exemples :

- *On considère une pièce de monnaie équilibrée. La fréquence théorique (ou probabilité) de l'issue « Pile » est $p=0,5$.*

  Imaginons qu'on lance cette pièce 10000 fois ; on obtiendrait un échantillon de taille $n=10000$.

  Comme $n\geqslant 30$, $np=5000\geqslant 5$ et $n(1-p)=5000\geqslant 5$, on peut calculer l'intervalle de fluctuation au seuil 95 % du caractère « Pile » :

  $$\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}};p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]=\left[0,5-\frac{1}{\sqrt{10000}};0,5+\frac{1}{\sqrt{10000}}\right]=[0,49;0,51].$$

  Il y a donc 95 % de chance que la fréquence observée de l'issue « Pile » sur un échantillon de taille 10000 appartienne à cet intervalle.

- *On dispose d'une pièce de monnaie que l'on sait truquée. On veut estimer la probabilité p de l'issue « Pile » pour cette pièce.*

  On procède à 10000 tirages. La fréquence observée sur cet échantillon de taille $n=10000$ de l'issue « Pile » est $f=0,423$.

  On calcule l'intervalle de confiance au seuil 95 % :

  $$\left[f-\frac{1}{\sqrt{n}};f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]=\left[0,423-\frac{1}{\sqrt{10000}};0,423+\frac{1}{\sqrt{10000}}\right]=[0,413;0,433].$$

  Il y a donc 95 % de chance que la probabilité p de l'issue « Pile » appartienne à cet intervalle.

c) Prise de décision à partir d'un échantillon

<u>Propriété :</u> On considère une population dans laquelle on **suppose** que la proportion d'un caractère est p. On **observe** sur un échantillon de taille n une fréquence f du caractère.

On veut tester l'hypothèse : « La proportion de ce caractère dans la population est p ».

Si I est l'intervalle de fluctuation au seuil 95 % (en respectant les conditions de validité), la règle de décision est la suivante :

– Si $f\in I$, on considère que l'hypothèse selon laquelle la proportion est p dans la population n'est pas remise en question, et on l'**accepte au seuil de confiance 95 %**.

– Si $f\notin I$, on **rejette** l'hypothèse selon laquelle cette proportion est p **au seuil de confiance 95 %**.